DAS

QUADRAT

DIE

GRUNDLAGE

ALLER

PROPORTIONALITÄT

IN DER

NATUR

Das Quadrat

die

Grundlage aller Proportionalität in der Natur

und das

Quadrat aus der Zahl Sieben

die

Uridee des menschlichen Körperbaues.

Von

Franz Liharžik,

Doctor der Medicin und Chirurgie, Augenarzt und Accoucheur, prakt. Kinderarzt, Ritter des kais. Mexikanischen Guadalupe- und des königl. Belgischen Leopold-Ordens, Besitzer der kais. Oesterreichischen, der königl. Sächsischen und der herzogl. Nassau'schen dem Adolfs-Orden affiliirten Medaille für Wissenschaft und Kunst und der Londoner Preismedaille des Jahres 1862. Mitglied der kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Wissenschaften, des Doctoren-Collegiums und der kais. geologischen Reichsanstalt zu Wien, actives Mitglied der kais. Naturforschenden und der kais. medicinisch-physikalischen Gesellschaft zu Moskau, corresp. Mitglied der königl. medicinisch-physikalischen Gesellschaft zu Athen, dann der königl. ostpreussischen öconomisch-physikalischen, der Graubündtner Gesellschaft und der Gesellschaft Bandiera zu Palermo etc. etc.

WIEN.

Verlag von Herzfeld & Bauer.

1865.

Buchdruckerei von Eduard Sieger in Wien.

Inhalt.

Vorwort.

Um selbst den Schein zu vermeiden, als hätte ich bei vorliegender Arbeit den allein richtigen Weg der streng objectiven Forschung verlassen und mich unfruchtbaren Speculationen hingegeben, glaube ich einige Erläuterungen über den Standpunkt und die Motive geben zu müssen, die mich dabei geleitet haben.

Das hiemit der Oeffentlichkeit übergebene Werk behandelt zuerst ein rein mathematisches Problem, welches daher sowie alle ziffermässigen Aufgaben an und für sich jede sogenannte reine Speculation von vornherein ausschliesst.

Ganz anders verhält es sich aber, wenn es sich darum handelt, nachzuweisen, in welchen Beziehungen dieses glücklich gelöste Problem zu gewissen, in der Natur vorkommenden Erscheinungen und Processen stehe; wenn nachgewiesen werden soll, dass die Functionen der Naturkräfte nach den von ihnen zu Stande gebrachten Grössenverhältnissen ihrer Producte mathematisch genau mit jenen Grössenbestimmungen zusammenfallen, die das Product einer reinen mathematischen Function sind. Hier musste eine bestimmte speculative Forschung zu Hülfe genommen werden, um erstens eine solche, wirklich bestehende Uebereinstimmung zu ergründen, und zweitens, um zu zeigen, dass beide Functionen auf demselben mathematischen Grundprincipe beruhen und daher aus ihm hervorgegangen sind.

Die Arbeit zerfällt daher in zwei von einander wesentlich verschiedene Theile. Der erste beschäftigt sich mit dem Wesen, der Auseinandersetzung und Begründung einer Rechnungsmethode, welche bereits in der vorgeschichtlichen Zeit bekannt sein musste, von der auf uns nur rudimentäre Ueberreste übergegangen sind, und die mit unseren jetzt bekannten Rechnungsmethoden nichts als die Ziffer und die Linie gemein hat.

Die ältesten Traditionen und Schriften sagen von ihr, dass sie ein Ausfluss der eigentlichen mathematischen Wissenschaft, der sogenannten reinen Mathematik sei, dass sie alle mathematischen Probleme gelöst enthalte, und dass mit ihrer Hülfe alle Naturgesetze berechnet und aufgestellt werden können.

Diese mathematische Wissenschaft ist nach urältester Ansicht die Wissenschaft κατ ἐξοχήν, welche die Grundprincipe aller übrigen Wissenschaften enthalte, so dass alles menschliche Wissen aus ihr als seinem Urquell entspringt.

Die sogenannten magischen oder Zauberquadrate, die aus ihnen hervorgegangenen mystischen oder heiligen Zahlen und die ganze Pythagoreische Zahlenlehre sind jene geringen Ueberreste, die uns dieses bis jetzt nicht gelöste Räthsel blos andeuten, welche aber in ihrer fragmentären Form und Unvollkommenheit nicht die schwächste Einsicht in den Sinn obiger Behauptung zulassen.

Im zweiten Theile sollen jene Andeutungen gegeben werden, welche darauf hinweisen, wie diese neue Rechnungsmethode auf eine Naturerscheinung angewendet werden muss, um den Zusammenhang beider, dann die Gleichheit ihrer Functionen und Producte zu constatiren. Dieser Theil scheint mir nun berufen, der Naturforschung neue Wege zu eröffnen, indem er nach meiner Ueberzeugung eine Grundlage enthält, auf welcher sich ein, mathematisch und logisch festgegliedertes, neues wissenschaftliches Gebäude erheben soll.

Die systematische Durchführung und Begründung der neuen Rechnungsmethode genügt daher für sich allein noch nicht, um zu diesem hohen Ziele zu gelangen; es muss mit ihr noch eine bestimmte speculative Forschung verbunden werden, deren Grundzüge ich mir selbst auf die Gefahr hin zu entwerfen

erlaubte, dass ich eine noch nicht ganz reife Frucht der Oeffentlichkeit übergebe. Die Ueberzeugung allein, dass die Aufgabe, wie sie mir vor Augen schwebt, die Grenzen eines Menschenlebens weit überschreitet und nur durch das Zusammenwirken vieler Kräfte vielleicht erst nach jahrelangen Bemühungen gelöst werden kann, hat mich bewogen, einen Theil der von mir bis jetzt gesammelten Daten hier anzuführen, damit das hiedurch für den so wichtigen Gegenstand geweckte Interesse jene Ausdauer erzeuge, die zum glücklichen Gelingen des Werkes unentbehrlich ist.

So wie ich es in meinem ersten Werke freimüthig ausgesprochen habe, dass mir nur jene Forschung auf dem Gebiete der Natur für vollberechtigt und nutzbringend gilt, die auf einer leitenden Idee fussend objective Thatsachen aufsucht, um die ursprüngliche Idee bestättigt oder widerlegt zu finden: so spreche ich es jetzt abermals mit noch grösserer Sicherheit aus, dass die empirisch gefundenen Thatsachen nach einem fertigen Plane geprüft werden müssen, um aus ihnen allgemeine Gesetze ableiten und, da der Gedanke nahe liegt, dass die Einzelgesetze unter höheren und diese wieder unter einem höchsten oder Universalgesetze stehen, der Erforschung dieses letzteren nachstreben zu können.

Oft habe ich mich der wahren Worte erinnert, die A. von Humboldt im Kosmos spricht: „Wenn uns auch das Ganze unerreichbar ist, so bleibt doch die theilweise Lösung des Problems, das Streben nach dem Verstehen der Welterscheinungen der höchste und ewige Zweck aller Naturforschung.“

„Der Inbegriff von Erfahrungskenntnissen und eine in allen ihren Theilen ausgebildete Philosophie der Natur (falls eine solche Ausbildung je zu erreichen ist) können nicht in Widerspruch treten, wenn die Philosophie der Natur, ihrem Versprechen gemäss, das vernunftmässige Begreifen der wirklichen Erscheinungen im Weltall ist. Wo der Widerspruch sich zeigt, liegt die Schuld entweder in der Hohlheit der Speculationen oder in der Anmaassung der Empirie, die mehr durch die Erfahrung erwiesen glaubt, als durch dieselbe begründet wird.“

„Es geziemt nicht dem Geiste unserer Zeit, jede Verallgemeinerung der Begriffe, jeden auf Induction und Analogie gegründeten Versuch, tiefer in die Verkettung der Naturanschauungen einzudringen, als bodenlose Hypothese zu verwerfen, und unter den edlen Anlagen, mit denen die Natur den Menschen ausgestattet hat, bald die nach einem Causalzusammenhang grübelnde Vernunft bald die regsame, zu allem Entdecken und Schaffen nothwendige Einbildungskraft zu verdammen.“

Es geziemt, muss auch ich ausrufen, dem Geist unserer Zeit nicht, sich einseitig der Erforschung objectiver Thatsachen hinzugeben und dabei die Functionen des eigenen Verstandes ganz ausser Acht zu lassen. Wollte man mit der philosophischen Forschung so lange warten, bis die objective fertig geworden ist, so würde man wohl niemals zu jener gelangen, weil es kaum denkbar ist, dass diese zu einem Abschluss gebracht wird. Deshalb müssen, glaube ich, beide mit einander betrieben werden, beide müssen sich gegenseitig unterstützen und ergänzen. Die objective Naturforschung wird ohne richtige allgemeine Anschauungen eben so wenig gefördert als die Philosophie, wenn diese der zur Begründung ihrer Aussprüche nothwendigen objectiven Untersuchungen entbehrt.

Wenn man daher aus Furcht, sich in die abstracten Theorien vergangener Zeiten zu verlieren, seinen Blick nur in die allernächst liegenden Dinge versenkt und ihn nicht zu erheben wagt, um eine allgemeine Uebersicht zu gewinnen, so fällt man in das andere Extrem; man sieht das Ganze von lauter Theilen nicht mehr und gelangt auf diesem Wege zu einer allgemeinen Naturanschauung eben so wenig, wie der blos speculative Denker.

Von dieser Ueberzeugung tief durchdrungen, war ich stets bemüht, die durch exacte Forschung gewonnenen und mittelst der Zahl festgestellten Thatsachen mit einander zu vergleichen und zu ergründen, ob wohl in diesen von der Natur gleichsam dictirten Zahlen irgend eine Ordnung aufzufinden sei, die mit jenen Ordnungen übereinstimmt, die wir als mathematische Functionen bezeichnen.

Das Gesetz der Schwere und die dadurch möglichen Berechnungen in der Astronomie, Statik und Dynamik, die Verhältnisse der Zahlen und der geometrischen Grössen in der Chemie, Akustik und Optik schienen mir unzweifelhaft darzuthun, dass alle Naturprocesse, als Erscheinungen im Raume und in der Zeit, mathematischen Gesetzen folgen, d. h. dass sie mit gewissen mathematischen Grundsätzen und Wahrheiten eine gleiche Grundlage und Gliederung besitzen.

Aus den an mehr als zwölftausend Individuen jeglichen Alters und beiderlei Geschlechtes gemachten genauen Messungen ergab sich als erstes positives Resultat die Thatsache, dass das Wachsthum des Menschen in der Zeit nach einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung vorschreite. Das Anfangsglied derselben ist die Einheit, welche einen Sonnenmonat, diesen als den zwölften Theil des Jahres gerechnet, bedeutet; eben diese Einheit bestimmt auch die stetige Differenz und dreihundert solcher Einheiten bilden das Endglied besagter Reihe.

Hier zeigte es sich also, dass die Function der Zeit — der Wachsthumsdauer — mit einer bereits bekannten mathematischen Ordnung ziffermässig übereinstimme, dass sie in Wahrheit mathematisch gegliedert sei.

Die Prüfung und Analyse der Zahlen und Zahlenverhältnisse jener Grössen, welche die Wachsthumszunahme des Körpers und seiner Theile in der aufsteigenden Zeit bezeichneten, schien wohl öfter ebenfalls eine bereits bekannte Zahlenfunction zu ergeben; diese Vermuthung erwies sich aber eben so oft als eine Täuschung, so wie die mathematischen Consequenzen gezogen wurden, die nothwendig daraus hätten hervorgehen müssen, wenn diese beiden Functionen sich als mathematisch identisch erweisen sollten.

Als nach der Entdeckung des in den Gesetztafeln aufgestellten ziffermässigen Gesetzes die darnach unter der Leitung des Zirkels und des Maassstabes geformten Modelle in analytischer Prüfung ihrer Linien ein bestimmtes geometrisches System ihrer Construction ergaben, und zeigten, dass der ganze menschliche Körperbau bis in seine kleinsten Theile sich aus **sieben** Cardinalgrössen geometrisch aufbauen lasse: wurde ich zu der Vermuthung hingelenkt, das ganze

Wachsthumsgesetz sei ein geometrisches, und die zur Construction der menschlichen Gestalt erforderlichen **sieben** Grundzahlen seien geometrische Grössen, d. h. Linien.

Dass die Mathematik eben so wenig abgeschlossen ist wie alles übrige menschliche Wissen, wird wohl kaum bestritten werden. Das Studium der ältesten mathematischen Kenntnisse, wie sie uns in der Tradition, in den Monumenten und Baudenkmälern, in den Schriften aus grauester Vorzeit vorliegen, schien mir nun Andeutungen zu ergeben, dass bereits im Zeitalter der Mythe gewisse mathematische Wahrheiten und Functionen, die von unseren bestehenden Lehrsätzen wesentlich verschieden sind, bekannt waren. Der Pythagoreische Lehrsatz, die Proportionalität des goldenen Schnittes, welche von Zeising als in der ganzen Natur vorherrschend nachgewiesen wurde, die Verhältnisse des Durchmessers zur Peripherie, und das Dreieck als Maasseinheit einer jeden Fläche sind nebst dem System der Zahlen nach der Linie oder den magischen Quadraten eben so viele redende Zeugen, auf welch' hoher Stufe damals schon das mathematische Wissen gestanden, wie genau die sogenannte Natur der Zahlen und Linien bekannt war und wie wünschenswerth es erscheine, dieser urältesten Seite der Mathematik jene Aufmerksamkeit zu widmen, die sie bei näherer Betrachtung des Gegenstandes im höchsten Grade verdient.

Dieser Art der Forschung verdankt die vorliegende Arbeit ihre Entstehung; die dabei gewonnenen Resultate übergebe ich mit frohem Muthe der Wissenschaft, getragen von dem Bewusstsein, dass meine Bemühungen einzig und allein dahin gerichtet waren, diesen bis jetzt noch ganz dunkeln Weg in etwas zu erhellen, eine neue Richtung der Forschung anzubahnen, und zu sehen, welche Berechtigung das Alterthum besessen hat zu dem Ausspruche: „Das Wesen oder der Urgrund aller Dinge ist die Zahl."

Ich weiss sehr wohl, dass ich mit dieser, jetzt für veraltet geltenden Forschungsmethode einen Weg betrete, der nicht beliebt ist; dass man den Standpunkt, auf den ich mich gestellt, für einen überwundenen erklären wird,

und dass eine Denkweise, die einer Speculation auch nur im entferntesten ähnlich sieht, einer Zeit widerstrebt, die blos durch bewaffnete oder unbewaffnete Sinne erfasste und constatirte Thatsachen gelten lassen will. Dennoch konnte ich meiner individuellen Neigung und Anschauungsweise nicht widerstehen, einem Leitfaden zu folgen, der mich tiefer in die wunderbare Verkettung der merkwürdigsten Naturerscheinungen einzuführen versprach. Seit jeher gewohnt, nur jene Bestimmung einer Erscheinung für feststehend zu halten, welche durch die Zahl bezeichnet erscheint, war ich stets bemüht, eine jede Thatsache so zu beobachten und zu prüfen, dass es möglich wurde, die Resultate durch Zahlen auszudrücken. Zahlen und Zahlenverhältnisse lassen an und für sich keine andere Bedeutung und Auslegung zu, als ihnen eben die Ziffer gibt; sie können daher, wo immer sie vorkommen mögen, nicht übersehen und mit andern Bestimmungen verwechselt werden.

Dieses die Ursache, warum die grössten Denker aller Zeiten immer wieder auf Zahlenbestimmungen zurückgekommen sind, und diese für die allein untrüglichen gehalten haben. Dass es aber bei den Zahlenbestimmungen vor Allem darauf ankommt, ob die Zahlen wahrhafte Ausdrücke der Thatsachen sind und in nothwendigem Zusammenhang mit ihnen stehen, wird wohl nicht erst gesagt werden müssen. Wo diese Uebereinstimmung fehlt, wo ein nothwendiger Zusammenhang zwischen der Zahl und der durch sie bezeichneten Thatsache nicht nachgewiesen werden kann, da fällt freilich die Berufung auf sie und ihre Anführung eben so gut in das Reich bodenloser Speculationen und Phantasien, wie dieses bei Beweisführungen der Fall ist, deren Schlüsse auf inhaltlosen Begriffen als Prämissen beruhen. Da in diesen Irrthum sehr viele Forscher der zuletzt verflossenen Jahrhunderte verfallen sind, indem sie mit Zahlen, die keine bestimmte Bedeutung hatten, phantasiereiche Combinationen und Auslegungen verbanden: so wurde die Ansicht adoptirt, alle diese Bemühungen seien fruchtlos, und müssten als mathematische Spielereien oder höchstens Curiositäten aus dem Bereiche der exacten Forschung ausgeschlossen werden.

In wie weit es mir nun gelungen ist, das eigentliche Wesen der sogenannten magischen Quadrate aufzuschliessen, und ihre Bedeutung für Mathematik und Naturwissenschaft nachzuweisen, überlasse ich getrost dem unparteiischen Urtheile derjenigen, die gleich mir der Wahrheit um ihrer selbst willen nachstreben. An diese habe ich nur noch die Bitte zu stellen, sie möchten sich durch die herrschende Ansicht nicht beirren lassen und eine tiefere Einsicht und grössere Aufmerksamkeit einem Gegenstande nicht versagen, der nach den bis jetzt bekannten Daten keine Beurtheilung *a priori* zulässt.

Wien, Ende Jänner 1865.

Der Verfasser.

Einleitung.

Nachdem das Gesetz des menschlichen Wachsthums in seiner arithmetisch-geometrischen Form aufgedeckt vorlag, wurde meine Aufmerksamkeit in hohem Grade auf jene Zahlen hingelenkt, welche als Fundamentalzahlen des mathematischen Gebäudes und zugleich als Cardinalgrössen des menschlichen Körpers die einzelnen Dimensionsverhältnisse desselben bezeichnen. Die ausserordentliche Einfachheit dieser Verhältnisse, wie sie in den Gesetztafeln am Körper des Neugebornen erscheinen, erregte meine höchste Bewunderung; durchgehends sind sie in den ganzen Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 9, 12 ausgedrückt.

Diese ganzen Zahlen werden wieder durch ein constantes geometrisches System von Linien und Kreisen so beherrscht, dass sie in ihrer Vergrösserung und Umwandlung während des Wachsthums auf allen Stufen desselben die vollkommenste Menschengestalt construiren, deren Maasse mit den in den arithmetischen Tafeln aufgestellten Messungsresultaten der Grösse nach völlig übereinstimmen.

In dieser erhabenen Einfachheit der durch jene Zahlen ausgedrückten Verhältnisse und der auf ihnen beruhenden Construction ahnte ich das Grundprincip des Bauplanes, welcher der Bildung des herrlichsten Werkes der Schöpfung, des Menschen, zu Grunde gelegen hatte. Warum waren es gerade diese Zahlen und keine andern, welche die unerforschliche höchste Weisheit aus der unendlichen Zahlenreihe gewählt hatte? Liegt nicht vielleicht in dieser Wahl der unumstössliche, weil mathematische Beweis davon, dass sich aus ihnen allein

die vorhandenen, so einfachen, und dabei so vollkommenen arithmetisch-geometrischen Resultate erzielen liessen?

Solche Betrachtungen wurden in verstärktem Maasse in mir geweckt durch eine im Journal „*The future*“ von Luke Burke im Mai 1862 erschienene philosophische Abhandlung unter dem Titel: „*The plan of the universe*“. Hier wurde die Behauptung aufgestellt und durch philosophische Forschung zu beweisen gesucht, dass die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 9, 12 dem Bau des Universum vorstehen. Es wurde ferner gezeigt, wie alle Naturerscheinungen im Weltall sich in gewissen Gruppen bewegen, welche durch die genannten Zahlen beherrscht erscheinen; wie durch sie auf die Gesetze der Akustik, die Classificationen der Naturgeschichte, die Thatsachen der Anatomie, der Physiologie u. s. w. der allein maassgebende Einfluss geübt wird.

Dass übrigens diese Zahlen sammt ihrer tiefen Bedeutung schon den ältesten Culturvölkern bekannt sein mussten, zeigen unzweifelhaft alle ihre heiligen Bücher und Traditionen. Die Cultur- und Religionsgeschichten der Hindu, der iranischen Völker, der Hebräer und Aegypter, als deren verlässlichste Quellen von mir Rhode's Werke über indische Weisheit und Cultur, Kleuker's und Spiegel's Zend-Avesta und Kreuzer's Symbolik benützt wurden, enthalten eine fortlaufende Kette von Daten, welche entweder geradezu in den genannten Zahlen oder in deren einfachsten Functionen ausgedrückt sind.

Aegypter.

Bei den alten Aegyptern spielten diese Zahlen in allen religiösen und politischen Einrichtungen die grösste Rolle. Sie werden überall aufgefunden, wo es sich um die ziffermässige Bestimmung von Grundwahrheiten handelt. Durch die Güte des geehrten Directors des Soans-Museum in London, Herrn Josef Bonomi, wurde ich zuerst mit dem Sinne jener Hieroglyphen, allegorischen und symbolischen Figuren näher bekannt, welche die Wände des im Soans-Museum aufgestellten, aus der Zeit 1250 v. Ch. stammenden Sarkophages bedecken, und deren Hauptheile und wichtigsten Züge ich seitdem an den Sarkophagen im Louvre und in der k. k. Ambraser-Sammlung wieder vorgefunden habe.

Fast überall sieht man die Mythen von der Seelenwanderung und der Ueberwindung der Schlange dargestellt. Man findet die Göttin der Verstorbenen, Nephte oder Neith, die Seelen der Dahingeschiedenen zur Unterwelt geleiten,

wo sie auf einem von einer gewissen Anzahl Personen gezogenen Kahne fahrend an der Pforte erscheinen, und vom Pförtner in den Richtersaal eingelassen werden. Hier sitzt der ewige Richter auf seinem Throne, und vor ihm werden die Herzen auf der Wage der Gerechtigkeit gewogen. Diejenigen, deren Herzen zu leicht befunden wurden, kommen in die sieben Höllen, während jene, deren Herzen hinlänglich schwer wogen, in die sieben Himmel eingehen. Die aber mit leichteren Sünden beschwert vor dem Gerichte erschienen sind, werden in ein Schwein verwandelt und müssen die Seelenwanderung auf der Oberwelt durch alle Classen des Thierreichs durchmachen, bis sie wieder im Menschenleibe angelangt dort der Tugend gehuldigt haben und nun von jeder weiteren Wanderung entbunden, für würdig befunden werden, in den Ort der ewigen Freuden einzugehen.

Die Ueberwindung und Vernichtung der Schlange, der Urquelle des Bösen, wird allegorisch durch eine Gestalt dargestellt, welche mit gezückter Lanze vor der in Krümmungen sich windenden Schlange stehend gerade ihren Kopf verwundet, nachdem alle Krümmungen bereits mit Lanzenspitzen durchbohrt erscheinen.

Als ich nun diese Mythen und Allegorien näher betrachtete, fiel es mir auf, dass alle diese verschiedenen Scenen durch eine bestimmte Anzahl von Figuren dargestellt sind.

Ueberall sieht man Einen ewigen Richter, Zwei Orte, den der Belohnung und den der Strafe, Drei Göttergestalten, die den Menschen regieren, nämlich Osiris, Isis und Hermes.

Gruppen, aus fünf Personen bestehend, sind bei gewissen Beschäftigungen versammelt.

Die Schlange windet sich in sieben Krümmungen, in deren Zwischenräumen sich je eine Menschengestalt mit einem Schweinskopfe befindet. Diese sieben Gestalten bezeichnen die sieben Laster. Diese, sowie die sieben Tugenden empfangen in den sieben Höllen und den sieben Himmeln ihren Lohn.

Neun ist die Anzahl der Verstorbenen, die zum Gerichte wandern, und neun deutlich markirte Angeln gibt es, in denen sich sowohl die Himmelspforte als auch der Eingang zur Hölle drehen.

Endlich ziehen stets zwölf Personen das Schiff; zwölf sind es auch, welche den Himmel und die Hölle bevölkern.

Vergleichung der Zahlen des Gesetzes mit den Zahlen der heil. Schrift.

Nach der mosaischen Schöpfungsgeschichte hat Gott die Welt in sechs Tagen geschaffen. Erst in der sechsten Epoche ist nach dem Gesetze des Wachsthums die Entstehung eines jeden Individuums abgeschlossen, und erst von da an eilen die jetzt gleichsam fertigen Theile ihrer stufenweisen Vergrösserung und endlichen Vollendung zu. Wir sehen daher bei jedem Wachsthume das Wunder der Schöpfung in den gleichen sechs Zeiträumen sich erneuern.

An einer andern Stelle der heiligen Schrift heisst es: „Gott nahm Adam eine Rippe und schuf das Weib.“ — Nach dem Gesetze, welches den Bau des Menschen beherrscht, wird die vollkommenste Gestalt des Weibes in jedem Alter construirt, wenn man von der bezüglichen Länge des männlichen Brustkorbes eine Einheit seines Grundmaasses, welche eben eine mittlere Rippenbreite, oder, was dasselbe sagen will, eine Rippe ist, wegnimmt. Sofort ergibt dasselbe geometrische System aus mathematischer Nothwendigkeit die entsprechend abgeänderten Dimensionsverhältnisse der einzelnen Körpertheile, wie sie dem weiblichen Wesen zukommen und seine charakteristischen Merkmale bilden.

Ein eifriges Studium der heil. Schriften des israëlitischen Volkes brachte mir weiters die freudige Ueberraschung, dass auch hier die Grundzahlen des Gesetzes in mancherlei allegorischen und symbolischen Formen vorkommen, und eben weil es Zahlen sind, die keine verschiedene Auslegung zulassen, nicht übersehen und misdeutet werden können. Eine ähnliche Anschauung hierüber hatten schon vor mir mehrere Gelehrte, indem sie diesen Zahlen ihre besondere Aufmerksamkeit zuwandten. So besitzen wir eine Symbolik der Stiftshütte von Bähr, Dr. Luther und F. Friedrich. In diesen Werken wird nachgewiesen, dass der Bau der Stiftshütte mit ihrer ganzen Einrichtung und ihrem heiligen Geräthe genau dem Bau des menschlichen Körpers nachgebildet war, dass somit die Wohnung Gottes als Abbild des Menschen, welcher als Ebenbild des Weltalls und seines Schöpfers diesen gleichsam bildlich darstelle, auf denselben Grundlagen ruhen müsse wie dieser. Da aber die ziffermässigen Bestimmungen des Wachsthumsgesetzes zur Zeit jener Deutung nicht bekannt waren, so musste man allerdings die sinnreiche Auslegung der biblischen Zahlen anerkennen, ein wissenschaftlicher Werth jedoch konnte ihr bei dem fehlenden Nach-

weise eines mathematischen Zusammenhanges unter den Zahlen nicht zugesprochen werden.

In gleichem Sinne brachte Hermann Müller eine Abhandlung „Ueber die heiligen Maasse des Alterthums, insbesondere der Hebräer und Hellenen.“ Hier werden alle Maasse auf die Länge, Breite und Höhe der Arche Noë mit 300, 50, 30 Ellen oder sogenannten Doppelfussen zurückgeführt und aus diesen Zahlen dann die Uebereinstimmung der Construction der mosaischen Stiftshütte mit der Arche Noë nachzuweisen gesucht.

Die Zahlen ferner, mit welchen in den heiligen Büchern der Israëliten die Grösse der Opfergaben, der Bussübungen und aller andern Bestimmungen ausgedrückt sind, liefern den unumstösslichen weil ziffermässigen Beweis, dass der weise Gesetzgeber des israëlitischen Volkes auch mit jenen Theilen des Gesetzes bekannt sein musste, welche diese Zahlen enthalten. Diese wunderbare Congruenz der durch gewissenhafte Messungen aus dem offenen Buche der Natur abgelesenen Zahlen des Gesetzes mit den in den heil. Büchern vorkommenden hatte zuerst meine, auf schon früher bestandene ziffermässige Angaben basirte Ueberzeugung bestättigt, dass das Gesetz, dessen wichtigste Bestimmungen in der Urquelle der ewigen Wahrheit gefunden werden, auch in seinen übrigen Theilen wahr sein müsse.

Abraham ibn Esra.

Zu den ältesten mir bekannten hebräischen Schriftstellern gehört *R. Abraham ibn Esra.* Er schrieb im 12. Jahrhundert. Er ist wegen seiner grossen mathematischen und astronomischen Kenntnisse hoch berühmt und gilt den hebräischen Gelehrten bis auf unsere Tage in vielen Dingen als Autorität. Da nun seine Schrift: „Jesod Mora, Grundlage der Gottesverehrung, Untersuchungen über das mosaische Gesetz und die Grundprincipien der israëlitischen Religion. In einer paraphrastischen Verdeutschung von Dr. M. Creizenach, Frankfurt, Verlag von J. Baer 1840“ — nicht allein die mystische Deutung gewisser Zahlen, sondern auch eine ganz merkwürdige Betrachtung der Zahl 10 enthält, so will ich aus ihr die wichtigsten mathematischen Sätze in Kürze anführen. Das hebräische Werk selbst ist im Jahre 1834 als eine ausführliche Abhandlung über das Tetragramm unter dem Titel: „Sefer ha-Schem“ erschienen. Der mathematische Theil bildet die Basis seiner Religionsphilosophie. Herr Dr. Adolf Jellinek, Prediger in Wien, durch welchen ich auf dieses Werk aufmerksam gemacht wurde,

ist im Besitze eines handschriftlichen Commentars, welcher in gemeinschaftlicher Bearbeitung nächstens erscheinen soll und verspricht noch weitere sehr interessante Aufklärungen über diesen Gegenstand.

Die Abhandlung ist in zwölf Abschnitte getheilt, welche Pforten genannt werden, Pforten zum Eintritt in die wahre Gottesverehrung.

In der neunten Pforte lesen wir:

Der Versöhnungstag fällt auf den 10-ten des 7. Monats, wo die Sonne im Zeichen der Wage, der Mond aber in dem des Eimers, dem Ehrensitze des Mars ist. Die zwei Hauptfeste währen 7 Tage, durch ein Mondesviertel. Auch die Beschneidung ist näher als 7 Tage; denn ein Augenblick, der noch von einem Tage übrig ist, wird in der Rechnung der Thora für einen Tag gezählt, so wie ein Tag von einem Jahr für ein ganzes Jahr. So wird auch das Sabbatjahr und das nach 7 Sabbatjahren folgende Jubeljahr zur Verkündigung der Freiheit erklärt.

Die Schätzungssummen sind bestimmt für das Lebensalter von einem Monat, bis man rückwärts geht. Bis zu 5 Jahren zahlt man 5 Scheckel nach der Anzahl der Jahre, von 5—20 Jahren 20 Scheckel aus demselben Grunde; von 20—60 Jahren, wo Leib und Seele noch in voller Kraft sind, 50; von 60 Jahren und weiter nimmt die Schätzung um 25 Scheckel ab. — Für Weibspersonen zahlt man die Hälfte oder etwas mehr, also 3, 10, 30 Scheckel.

Die Bundeslade war 2½ Ellen lang, weil die Tafeln quadratförmig waren, die Länge wie die Breite, eine Elle, um den Raum der Lade auszufüllen, und die zwei Wände waren zusammen eine halbe Elle dick. Was aber die 1½ Ellen der Höhe betrifft, so ist dieses mit Inbegriff der Füsse zu verstehen.

Es gab in der Stiftshütte 3 Hauptgeräthe der Stiftshütte: die Lade, der Altar des Räucherwerkes und der Tisch mit dem Leuchter. Das Ephod trug zwei Steine; sowohl der zur Rechten als der zur Linken trug 6 Namen. Es war auf ihnen keine Gestalt und dies stellt den Gedanken vor. Der Brustschild war von der Arbeit des Ephod und war quadratförmig gegen die Cardinalpunkte, weshalb auch kein Stein auf ihm einem andern glich.

In der eilften Pforte lesen wir:

Alle Buchstaben — Sprachlaute werden durch 5 Organe hervorgebracht, nämlich: Kehle, Gaumen, Zunge, Zähne, Lippen.

Die Anzahl der hebräischen Buchstaben ist 22. Die Hälfte sind Wurzelbuchstaben; der Zungenbuchstaben gibt es 5, der Zischlaute 3, Lippenlaute 3.

1 (Aleph) ist die Veranlassung der Zahlen, aber nicht selbst eine Zahl; 10 (Jod) ist dem 1 ähnlich, denn es umfasst die Einer, und ist der Anfang der Zehner.

Bedenke ferner, dass die Länge eine Linie zwischen zwei Punkten ist. Kommt die Breite dazu, so sind es 2 Linien, die eine Ebene bilden; ein Körper hat aber 6 Richtungen (auf- und abwärts, vor- und rückwärts, nach rechts und links). Der Körper ist der Träger aller Merkmale, wie das mit Aleph beginnende Gebot alle übrigen 9 in sich schliesst, wie das reine Sein alle 9 anderen Prädicamente.

Die Basis aller Zahlen ist 10, denn jede Zahl, die auf 10 folgt, enthält entweder einen oder mehrere Theile davon. $\left(15=10+\frac{10}{2},\ 17=10+\frac{10}{2}+\frac{10}{5},\right)$ oder die Reihenfolge erneuert sich wegen der Verdoppelung ($20=2\times10$) oder wegen des Ueberganges von einer Dekade zur andern, ($70=7\times10$) oder die Zahl entsteht auf beide Arten zugleich $\left(68=6\times10+\frac{10}{2}+\frac{10}{5}+\frac{10}{10}\right)$. Andererseits gibt es 9 Einer, denn 10 ist der Anfang der Zahlenverbindungen und 1 ist keine Zahl. Eigentliche Zahlen gibt es daher acht. Vier sind Primzahlen, nämlich 2, 3, 5, 7.

Verbindet man 1, welches zugleich Quadratwurzel und Quadrat, Cubikwurzel und Cubus ist, mit dem Quadrate der ersten geraden Zahl, mit 4, so erhält man 5; verbindet man es aber mit dem Quadrate der ersten ungeraden Zahl, mit 9, so erhält man 10, und so entsteht der ehrwürdige Name, der aus den zwei Buchstaben י=10 und ה=5 gebildet ist. Verbindet man 1 mit dem Quadrate der dritten Primzahl, mit 25, so erhält man 26, den Zahlenwerth des ganzen Namens, (nämlich יהוה; י=10, ה=5, ו=6 ה=5) und zugleich den Zahlenwerth der Buchstaben Jod und He, wenn man sie so schreibt: יוד הא (י=10, ו=6, ד=4, ה=5, א=1); 26. Verbindet man endlich 1 mit dem Quadrat der vierten Primzahl, mit 49, so erhält man 50. Daher ist das fünfzigste Jahr das heilige Jubeljahr und der fünfzigste Tag das Wochenfest.

Eine Eigenschaft der Zahl 5 ist, dass sie die Summe aller ihr vorangehenden Primzahlen ist. ($2+3=5$). Der Zahlenwerth des göttlichen Namens יה ist die Summe einer Reihe von drei Buchstaben (wenn man nämlich die 9 Buchstaben von א=1 bis ט=9 in ein magisches Quadrat ordnet.) Addirt man alle Zahlen bis zum Zahlenwerth der zwei ersten Buchstaben des göttlichen

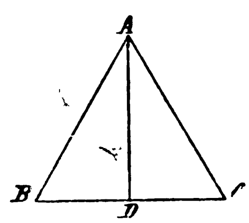
Namens, nämlich von 1—15, so erhält man 120, und so viel ist auch die Summe aller Quadrate der geraden Zahlen unter den 9 ersten. ($2^2+4^2+6^2+8^2=120$.) Addirt man

ד 4	ט 9	ב 2
ג 3	ה 5	ז 7
ח 8	א 1	ו 6

nun zu der Quadratsumme 120 die Summe aller Einer von 1—9, also 45, so erhält man die erste Hälfte des Namens Jehova mit der zweiten multiplicirt (יה = 15 mit וה = 11). Zieht man das Quadrat des ersten Buchstabens vom Quadrate der Summe der zwei ersten Buchstaben ab, nämlich 10^2 von 15^2, so bleibt der Cubus des zweiten Buchstabens, d. i. $5^3=125$, übrig. Zieht man ferner das Quadrat der Summe der zwei ersten Buchstaben vom Quadrate der Summe der drei ersten Buchstaben, nämlich $(10+5)^2$ von $(10+5+6)^2$ ab, so bleibt der Cubus des dritten Buchstabens $6^3=216$ übrig.

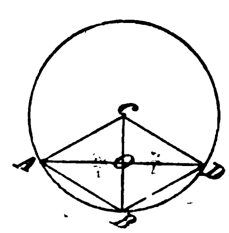
Das Geheimniss der Zahl Zehn.

Es ist bekannt, dass das Quadrat der Seite eines dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes gleich ist dem Quadrate der Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seiten dem Durchmesser dieses Kreises gleichen, weil nämlich das Quadrat der Höhe eines gleichseitigen Dreieckes gleich ist $\frac{3}{4}$ des Quadrates der Seite.



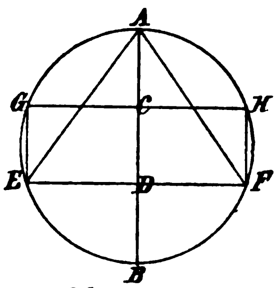
Bezeichnet man nämlich in dem gleichseitigen Dreiecke *ABC* die Seite *AB* mit *d* und die Höhe *AD* mit *h*, so ist nach dem pythagoreischen Lehrsatze $d^2=h^2+\frac{d^2}{4}$, daher $h^2=d^2-\frac{d^2}{4}=\frac{3}{4}d^2$.

Nimmt man nun dasselbe *d* zum Durchmesser eines Kreises und macht in diesem Kreise zwei Sehnen *AB* und *BD* gleich dem Radius $\frac{d}{2}$, so ist bekanntlich jeder der gespannten Bogen $\frac{1}{6}$ der Peripherie, daher der ganze Bogen $ABD = \frac{1}{3}$ der Peripherie und *AD* die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes. Um ihre Grösse zu bestimmen, ziehe man auch die Radien *AC* und *CD*. In dem Viereck *ACDB* sind alle Seiten gleich dem Radius, es ist daher eine Raute und die Diagonalen *AD* und *BC* durchschneiden sich senkrecht und halbieren einander. Bezeichnen wir nun die Seite *AD* des dem Kreise eingeschriebenen Dreieckes mit *m*, so ist in dem



rechtwinkligen Dreiecke AOC die Hypotenuse $AC = \frac{d}{2}$, die Kathete $CO = \frac{d}{4}$ und die Kathete $AO = \frac{m}{2}$; man hat daher die Gleichung $\frac{m^2}{4} + \frac{d^2}{16} = \frac{d^2}{4}$ oder $m^2 + \frac{d^2}{4} = d^2$; daher auch $m^2 = d^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{3}{4} d^2$ und $m = h$.

Zieht man ferner durch das Drittel eines Durchmessers eine auf dem Durchmesser senkrecht stehende Sehne, so ist das Quadrat dieser Sehne addirt zum Quadrate ihres Pfeils gleich dem Quadrate des Durchmessers. Theilt man nämlich den Durchmesser $AB = d$ in drei gleiche Theile $AC = CD = DB$ und zieht $EF = s$ senkrecht auf AB, so ist bekanntlich $\overline{DF}^2 = AD \times BD$ oder $\frac{s^2}{4} = \frac{d}{3} \times \frac{2d}{3} = \frac{2d^2}{9}$ und $s^2 = \frac{8d^2}{9}$; daher $s^2 + \frac{d^2}{9} = \frac{8d^2}{9} + \frac{d^2}{9} = d^2$ oder $\overline{EF}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2$. Bei jedem anderen Verhältniss zwischen AD und DB kommt dieses Resultat nicht heraus, sondern $\overline{EF}^2 + \overline{DB}^2$ ist mehr oder weniger als $\overline{AB}^2$.



Verlängert man nun in einem Kreise, dessen Durchmesser $= 10$ ist, den Pfeil BD bis $\frac{2}{3}$ des Durchmessers, also bis C, und zieht dann die daraufsenkrechte Sehne GH, so wie die Sehnen GE und HF, AE und AF, so findet man für den Flächeninhalt des Dreieckes AEF dieselbe Zahl, wie für die Peripherie des Kreises. Man hat nämlich $\overline{DF}^2 = AD \times DB = \frac{20}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{200}{9}$; also $DF = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{2}$; folglich ist EF oder die Grundlinie des Dreieckes $AEF = \frac{20}{3}\sqrt{2}$ und das Product dieser Grundlinie mit der Hälfte der Höhe AD oder der Flächeninhalt des Dreieckes AEF gleich $\frac{10}{3} \times \frac{20}{3}\sqrt{2} = \frac{200}{9}\sqrt{2} = \frac{200}{9} \times 1{\cdot}41 = \frac{282}{9} = 31{\cdot}33$. Das Rechteck $GHEF$ hat gleichen Flächeninhalt mit dem Dreieck AEF, denn est ist auch $EF \times GE = EF \times CD = \frac{10.20}{3.3}\sqrt{2}$. Die Peripherie endlich $3{\cdot}14 \times 10 = 31{\cdot}4$. — Daher ist auch die Quadratzahl vom Flächeninhalt des Dreieckes AEF in einem Kreise mit dem Durchmesser $= 15$ genau 5000; denn das Quadrat der halben Grundinie DF ist $\frac{2d}{3} \times \frac{d}{3} = \frac{2d^2}{9} = \frac{2.15^2}{9} = \frac{2.225}{9} =$

$\frac{450}{9} = 50$ und das Quadrat der Höhe ist $\frac{2d}{3} \times \frac{2d}{3} = 10.10 = 100$ das Product vom Quadrat der halben Grundlinie mit dem Quadrat der Höhe, oder die Quadratzahl vom Flächeninhalte ist also $50 \times 100 = 5000$. Die Quadratzahl einer Peripherie, deren Durchmesser $= 10$ ist, beträgt nach obigem $\frac{200\sqrt{2}}{9} \times \frac{200\sqrt{2}}{9} =$ $\frac{40000.2}{81} = \frac{80000}{81} = 987 + \frac{53}{81} = 987 + \frac{45}{81} + \frac{8}{81} = 987 + \frac{5}{9} + \frac{8}{81}$. Die Peripherie selbst als Wurzel dieses Quadrates ist $31^{0}\ 25'\ 35''\ 50'''$ (eigentlich $38 + \frac{25}{60} + \frac{36}{60^2} + \frac{50}{60^3}$, was man findet, wenn man bei der Wurzelziehung nicht Decimal-, sondern Sexagesimaltheile berechnet.)

Wenn man ferner den Zahlenwerth aller ausgeschriebenen Buchstaben des Namens Jehovah addirt, nämlich יוד הי ויו הי $= 20 + 15 + 22 + 15$, so erhält man 72. Daher haben auch unsere Alten gesagt, 72 sei die Zahl des vollkommen ausgesprochenen göttlichen Namens.

In jeder Peripherie aber, deren Durchmesser kleiner als 10 ist, verhält sich der Flächeninhalt des Dreieckes AEF zur Peripherie, wie der Durchmesser zu 10. Denn ist d der Durchmesser, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes $ADF = \frac{\sqrt{2d^2}}{3} . \frac{2d}{3} = \frac{d}{3}\sqrt{2} \times \frac{2d}{3} = \frac{2d^2}{9}\sqrt{2}$; die Peripherie ist aber, wenn 10 der Durchmesser ist, $= \frac{200}{9}\sqrt{2}$ oder $\frac{20}{9}\sqrt{2}$mal so gross, als der Durchmesser, sie ist daher bei d als Durchmesser $\frac{20d}{9}.\sqrt{2}$. Das Dreieck verhält sich also zur Peripherie wie $\frac{2d^2}{9}\sqrt{2} : \frac{20d}{9}\sqrt{2} = d : 10$. Die Proportion kann umgekehrt gestellt werden, wenn d grösser ist als 10.

Uebereinstimmung der Zahlen des Gesetzes mit den Zahlen der Zeitrechnung.

Eine andere merkwürdige Uebereinstimmung ergab die Vergleichung der dem Neugebornen und dem einundzwanzig Monate alten Kinde durch das Gesetz zugewiesenen Zahlen mit jenen Zahlen, welche unsere Zeitrechnung bestimmen.

Die Zahl 12 bezeichnet die Kopflänge; sie ist also die Zahl, welche das materielle Organ des Denkens, des Messens und aller übrigen geistigen Verrichtungen beziffert. In der Zeitrechnung aber gibt sie die Grundmaasse der Zeit an, nämlich die Bestimmung des Thierkreises, der Monate und der Stunden des Tages.

Die Zahl 7 bedeutet die Länge des Brustbeines und des Vorderarmes — und 7 beträgt die Anzahl Tage einer Woche.

Die doppelte 9=18 beziffert die Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels; und 18 Constellationen gibt es, in welchen der Mond zur Erde und zur Sonne während eines Jahres steht.

Die Zahl 30 gibt die Länge des Oberkörpers vom Scheitel zur Schoossfuge an — und 30 Tage beträgt die durchschnittliche Dauer eines Monates.

Die Zahl 13 bedeutet die aus der Geburtslänge 7 hervorgewachsene Länge des Brustbeines am Ende des ersten Wachsthumsabschnittes; der Mond macht in einem Sonnenjahre 13 Umläufe um unsere Erde, die wieder nach Wochen mit der Zahl 7 gemessen werden.

52 Cm. misst die Oberlänge am Ende des ersten Abschnittes, welche bei der Geburt 30 Cm. betragen hatte; 52 Wochen machen ein Jahr aus, das seinerseits wieder aus 12mal 30 Tagen besteht.

Am Ende des Wachsthums hat die geborne Kopflänge von 12 Cm. 24 Cm. erlangt; der Tag wird in 24 Stunden eingetheilt, von denen 12 auf den Tag, 12 auf die Nacht entfallen.

Die überraschende Thatsache nun, dass die hervorragenden Zahlen des Gesetzes auch mit den wichtigsten Zeitbestimmungen durch gleiche Ziffern bezeichnet werden, wodurch mir ein grundsätzlicher Zusammenhang zwischen ihnen angedeutet schien, lenkte meine Aufmerksamkeit auf jene Quellen, aus welchen die ersten Kenntnisse der Zeitbestimmung durch die ersten Elemente der Astronomie hervorgegangen sind.

Indier.

Indem ich zu dem Ende die Denkmäler der alten indischen Litteratur durchforschte, fand ich zu meiner grossen Verwunderung in den Veda's, im Ramajanam, in den Wydias nicht nur vorgeschrittene und umfassende astronomische

Kenntnisse, sondern ich sah auch in ihren Kosmogonien, ihren religiösen und politischen Einrichtungen, in ihrer Vocallehre und Grammatik, Rechtslehre und Medicin, Akustik und Sculptur die wichtigsten Zahlen des Gesetzes als die alle Verhältnisse und Grundwahrheiten dieser verschiedenen Doctrinen beherrschenden angewendet. Hier fand ich bereits die jetzt noch geltenden Bestimmungen des Sonnenjahres mit 18 und des Mondjahres mit 17 Mondconstellationen, nachdem deren Fixirung lange zwischen den Zahlen 20, 18 und 17 geschwankt hatte.

Wem fällt hier nicht die merkwürdige Analogie auf, welche zwischen den eben genannten Bestimmungen des Sonnen- und Mondjahres und jenen der männlichen und weiblichen Gesetztafel besteht, indem die Abänderungen, die der männliche Typus erlitten, um zum weiblichen zu werden, genau jenen Zahlenabänderungen entsprechen, welche wir in den Bestimmungen des Mondjahres gegen jene des Sonnenjahres sehen! — In den Veda's finden wir ferner das Jahr nach den 12 Zeichen des Thierkreises in 12 Monate, in 6 und später in 4 Jahreszeiten abgetheilt, die Länge der Woche mit 6 und mit 7 Tagen angenommen.

Nebst diesen astronomischen Zeitbestimmungen kommen die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 9, 12, ferner 24, 30, 300, dann 21 und 22, 27 und 28, besonders aber die Zahl 7 so häufig in den religiösen Vorschriften der Indier und in allen Lehren vor, die sich auf das öffentliche und Privatleben beziehen, dass man sich der Erkenntniss nicht verschliessen kann, es sei den indischen Weisen der eigentliche Werth und die tiefe Bedeutung der genannten Zahlen wohl bekannt gewesen, ohne dass sie vielleicht den inneren Zusammenhang der Zahl mit der Erscheinung zu präcisiren vermochten.

So sieht man, um nur einige Beispiele anzuführen, da eine eingehende Auseinandersetzung dieses Gegenstandes mit dem Zwecke dieses Werkes sich nicht verträgt, die Monas, die Einheit, als das Urprincip allen anderen Gottheiten und Principien vorangehen. Der Dualismus der physischen und moralischen Welt, des Guten und Bösen, des Lichtes und der Finsterniss, des positiven und relativen tritt überall heran. — In Brahma, Wischnu und Schiwen verehrten sie die Trias als die die Monade ergänzenden Grundprincipien der gesammten Weltordnung und aller physischen und psychischen Erscheinungen. — Die Fünf lernten sie an der Zahl der grossen Planeten kennen, und durch die Sieben bezeichneten sie die fünf Planeten mit Sonne und Mond als die lichtgebenden und die Geschicke

der Erde und des Menschen regierenden Himmelskörper. Die Zahl Sieben wurde seit den ältesten Zeiten als die besonders wichtige und heilige Zahl betrachtet; sie bezeichnet auch das Wasser, dann die sieben Töne und Farben, die sieben Tugenden und Laster, die sieben Himmel und Höllen. Die Zahl Sechs bedeutete ihnen das Feuer, die Zahl Neun die Rischi's oder begeisterte Wesen, entsprechend den neun Musen der Hellenen und Römer und zugleich die neun Avaters oder Verwandlungen des Gottes Wischnu. — Die Zahl Zehn bezeichnete die Medicin, achtzehn die Rechtsgelehrsamkeit, dreissig die Anzahl der Ragini's, d. i. der Schutzgottheiten der einzelnen Monatstage. — Den obersten Rang nahm aber die Zahl Zwölf ein; nach dieser regelten sie die Vernunfterkenntnisse, die politischen Eintheilungen, die Zeitbestimmung und den Stellenwerth ihres Zahlensystems, welches bei den alten Culturvölkern lange das herrschende gewesen zu sein scheint, bis es von der Dekadik verdrängt wurde.

Die Pythagoräer.

Unter den Philosophen-Schulen der Griechen waren es vor allen Pythagoras und seine Schüler, welche die Lehre von den Zahlen und ihrem Wesen in ein geordnetes System brachten. Die Pythagoräer sprechen geradezu von der Bedeutung der Zahlen und stellen die Erkenntniss ihres Werthes höher, als jede andere Erkenntniss des menschlichen Verstandes.

Die allgemeinste Charakteristik der pythagoreischen Philosophie liegt in der Behauptung, dass die Zahl das Wesen aller Dinge, dass alles dem Wesen nach Zahl ist.

Sie sagen, die Natur sei durch die Zahl befähigt, Gesetze erkennen zu lassen, zu leiten, über Alles zu belehren, wodurch eine Ueberschreitung oder ein Irrthum geschieht: „Du kannst die Natur der Zahl und ihre gewaltige Macht nicht nur in den übernatürlichen und göttlichen Dingen sehen, sondern auch in allen menschlichen Worten und Werken, in den Gewerben, den Künsten, in der Musik. Die Zahl lässt keine Lüge zu, die Wahrheit ist der Beschaffenheit der Zahl eigenthümlich und innewohnend."

Aristoteles sagt: „Die Zahl ist die Beherrscherin der Formen und Ideen, der Maassstab und der künstlerische Verstand des weltenbildenden Gottes."

Die Pythagoräer haben zwischen den Zahlen und dem Gezählten und namentlich zwischen der Einheit und dem Einen unterschieden. Hieraus hat man nun geschlossen, die pythagoreische Schule habe ihre Zahlenlehre in verschiedenen Richtungen ausgebildet; diejenigen, welche die Zahlen für den inhärirenden Grund der Dinge hielten, seien von denen zu unterscheiden, welche in ihnen blosse Musterbilder sehen wollten. In dasselbe Verhältniss setzt auch Philolaus die Zahl zu den Dingen, wenn er sie als deren Gesetz und als die Ursache der Eigenschaften und Verhältnisse derselben beschreibt; denn das Gesetz verhält sich zur Ausführung, wie das Urbild zum Abbilde.

Zu dieser Annahme hat die Pythagoräer ohne Zweifel, wie dies auch Aristoteles und Philolaus bestättigen, die Wahrnehmung geführt, dass alle Erscheinungen nach Zahlen geordnet, dass namentlich die Verhältnisse der Himmelskörper und der Töne, überhaupt alle mathematischen Bestimmungen von gewissen Zahlen und deren Verhältnissen beherrscht seien, eine Wahrnehmung, die ihrerseits wieder an den uralten Gebrauch symbolischer Rundzahlen (ganzer Zahlen), dann an die bei den Griechen — namentlich im appollonischen Cultus — sowie bei andern Völkern verbreiteten Meinungen über die geheime Kraft und Bedeutung der planetarischen Zahl Sieben, endlich an die vielen dreigliederigen Reihen in der Mythologie und an Hesiod's genaue Vorschriften über die glücklichen und bösen Kalendertage anknüpft. Es ist dies eine Vorstellungsweise, die uns fremdartig anspricht. Bedenkt man aber, welchen Eindruck die erste Wahrnehmung einer durchgreifenden und unabänderlichen mathematischen Gesetzmässigkeit auf den empfänglichen Geist des Alterthums machen musste, so wird man begreifen, dass die Zahl als die Ursache aller Ordnung und Bestimmtheit, als der Grund aller Erkenntniss, als die weltbeherrschende göttliche Macht verehrt werden konnte.

Alle Zahlen wurden in zwei Hauptclassen getheilt, in die ungeraden und die geraden, zu denen noch als Anhangsclasse die gerad-ungeraden hinzugefügt wurden. Die ungeraden nannten sie die begränzten, die geraden die unbegränzten, weil nämlich die ungeraden der Zweitheilung eine Gränze setzen, die geraden aber nicht. Daraus zogen sie den weiteren Schluss, dass alles aus dem Begränzten und dem Unbegränzten bestehe. Das

Begränzte und Ungerade gilt ihnen aber für das Bessere, Vollkommenere, das Unbegränzte und Gerade für das Unvollkommene.

Da nun hiernach die Grundbestandtheile der Dinge (Molecule) von ungleicher und entgegengesetzter Beschaffenheit sind, so war ein Band nothwendig, das sie verknüpfte, wenn irgend etwas aus ihnen entstehen sollte. Dieses Band der Elemente ist die Harmonie. Philolaus definirt die Harmonie als Einheit des Mannigfaltigen und als Consonanz des Zweispaltigen, deshalb müsse alles Zahl sein. Der ganze Himmel ist Harmonie und Zahl. Plato und vor ihm die Pythagoräer nannten die Musik Philosophie und sagten, die Welt sei nach der Harmonie eingerichtet. Deshalb wendeten sie ihre Forschung den Tonverhältnissen zu und bezeichneten die Octave mit dem Namen „Harmonia", nachdem sie deren akustischen Verhältnisse gemessen hatten.

Die Pythagoräer hielten ferner die Geometrie für die eigentliche Grundlage der Mathematik, und die geometrischen Figuren für das Princip des Körperlichen. Die geometrischen Figuren wurden wieder auf die Punkte oder die Einheiten zurückgeführt. Diese Einheiten (Monaden) sollen sie theils als etwas räumlich Ausgedehntes, theils auch als Zahlenbestandtheile betrachtet, und eben deshalb gelehrt haben, dass die körperlichen Dinge aus Zahlen bestehen. Schon Philolaus macht den Versuch, das Körperliche überhaupt, die physicalischen Grundeigenschaften der Körper insbesondere aus den Figuren und diese aus Zahlen abzuleiten.

Hier fand ich nun jene Ansicht zuerst ausgesprochen, die ich in dem Programm zu meinem Werke über das Gesetz des Wachsthums und den Bau des Menschen angedeutet habe, dass nämlich die im Gesetze aufgestellten Fundamentalzahlen nicht bloss die Gestalt des Menschen festsetzen, sondern dass sie auch in bestimmten Beziehungen zu den Eigenschaften der durch sie bezeichneten Körpertheile stehen, dass folglich durch sie die Grundwahrheiten der Anatomie, der Physiologie und Psychologie etc. eben so von der Natur dictirt vorliegen, wie wir dieses an den Wachsthumszunahmen des Halses (Kehlkopfes) für die menschliche Stimme und durch diese für die Akustik angegeben sehen.

Ueber das System und die Bedeutung der Zahlen bei den Pythagoräern will ich in Kürze nur folgendes anführen. Die Basis ihres Zahlensystems war die „Dekas"; denn da sie die Zahlen über zehn nur als Wiederholung der zehn ersten betrachteten, so schien ihnen die Zehn alle Zahlen und alle Kräfte

der Zahlen zu umfassen; sie heisst daher bei Philolaus gross, allmächtig und allesvollbringend, Anfang und Führerin des himmlischen und irdischen Lebens, und, wie überhaupt ohne die Zahl nichts erkennbar wäre, so sei im Besondern nur der Zehnzahl die Möglichkeit eines menschlichen Wissens zu verdanken.

Eine sehr wichtige Bedeutung legten sie der Zahl „Vier" bei, hauptsächlich aus dem Grunde, weil die Summe der ersten vier Zahlen die vollkommene Zahl 10 ergibt. In dem bekannten Pythagoreischen Schwur wird daher Pythagoras als Verkündiger der Tetraktys und diese selbst als die Quelle und Wurzel der ewigen Natur gefeiert. 4 ist ferner die Zahl der Elemente und als erste Quadratzahl, entstanden aus gleichmal Gleichem, galt sie auch als Symbol der Gerechtigkeit, welche Gleiches mit Gleichem vergilt.

Die Einheit wurde als das Erste erklärt, aus dem alle übrigen Zahlen entstanden sind; daher sind in ihr, wie Aristoteles im Buche über Pythagoras sagt, die entgegengesetzten Eigenschaften der Zahlen vereinigt; dem Geraden zugesellt, macht sie das Ungerade, mit dem Ungeraden verbunden das Gerade, was nicht möglich wäre, wenn das „Eins" nicht an beiden Naturen Theil hätte. Wegen ihrer Unveränderlichkeit war die Einheit das Symbol der Vernunft.

„Zwei" (die Dyas) ist die erste gerade Zahl und bedeutet, weil sie veränderlich und unbestimmt ist, die Meinung.

„Drei" ist die erste ungerade und vollkommene Zahl, weil in ihr zuerst Anfang, Mitte und Ende ist.

„Fünf" ist die erste durch Addition entstandene Zahl (2+3), und weil sie also die Verbindung der ersten weiblichen mit der ersten männlichen Zahl ist, heisst sie die Ehe. — Drei, Vier und Fünf sind die Zahlen des vollkommensten rechtwinkligen Dreiecks und geben eine stätige arithmetische Progression (goldener Schnitt.)

„Sechs" ist das erste Product, hervorgegangen aus 2mal 3, bedeutet nach Philolaus die Beseeltheit und bezeichnet überdies die Anzahl der Gegensätze, die durchaus physicalischer Natur sind, als: licht und finster, warm und kalt, trocken und nass."

„Sieben", das Symbol der richtigen Zeit, weil nach alter Meinung durch sie die Stufenjahre bezeichnet werden, dann der Gesundheit und des Lichts, ist die einzige Zahl innerhalb der Dekade, die weder einen

Factor hat, noch auch ein Product ist. Sie ist die Summe aus 3 und 4 und nebst der 4 die mittlere arithmetische Proportionale zwischen 1 und 10. ($1+3 = 4$; $4+3=7$; $7+3=10$; also $4+7=7+10$.)

„Acht" ist die erste Cubikzahl und die erste Tetraktys, die sowohl aus den vier ersten ungeraden, als aus den vier ersten geraden Zahlen gebildet werden kann, deren Summe gleich ist der Summe der dritten Potenzen von 1, 2 und 3. $(1+3+5+7)+(2+4+6+8) = 1^3+2^3+3^3$; $16+20 = 1+8+27$; $36 = 36$. Sie bedeutet nach Philolaus Liebe und Freundschaft, Klugheit und Erfindungsgabe.

„Neun" musste schon als Quadrat von 3 und als Schlusszahl unter den Einheiten eine bedeutende Stelle einnehmen.

An das arithmetische System reihten die Pythagoräer, denen Zahl und Harmonie fast identische Begriffe waren, das harmonische unmittelbar an. Indessen forderte die verschiedene Natur der beiden Gebiete für letzteres eine andere Behandlung. Während die Zahlen dekadisch geordnet wurden, ist das Maass der Töne — die Octave.

Die Haupttheile der Octave sind nach ihnen die Quart und die Quint. Das Verhältniss der Töne in denselben, welches theils nach der Spannung, theils nach der Länge der Saiten gemessen wird, ist für die Quart mit $3:4$, für die Quint mit $2:3$, für die Octave mit $1:2$ festgesetzt.

Neben den Tönen sind es zunächst die geometrischen Figuren, auf welche die Zahlenlehre ihre Anwendung finden musste. Nach Aristoteles setzten die Pythagoräer den Punkt gleich der Einheit, die Linie gleich der Zwei, die Fläche gleich der Drei. Von Philolaus weiss man, dass er Vier für die Zahl des Körpers erklärte, und zwar deshalb, weil die gerade Linie durch zwei Punkte, die einfachste geradlinige Figur durch drei Linien, der einfachste regelmässige Körper dnrch die vier Flächen begränzt wird, wogegen der Punkt die untheilbare Einheit ist.

Von der Gestalt der Körper sollte nun nach Philolaus ihre elementare Beschaffenheit abhängen. Er wies nämlich unter den fünf regelmässigen Körpern der Erde den Cubus, dem Feuer das Tetraëder, der Luft das Octaëder, dem Wasser das Ikosaëder, dem fünften allumfassenden Elemente das Dodekaëder zu d. h. er nahm an, dass die kleinsten Theile dieser verschiedenen Materien die angegebene Gestalt haben. — Hier findet man bereits die Ansicht ausgesprochen,

welche in neuester Zeit wieder die Chemie adoptirte, nämlich, dass die Materie nicht bis in's Unendliche theilbar sein könne, sondern aus untheilbaren Elementartheilchen (Moleculen) von einer bestimmten, ihnen zukommenden Form bestehen müsse, die sich als Vielfaches der Einheit in zahllosen Verbindungen an einander reihen und dadurch jedem Krystall die ihm eigene Form verleihen.

Plato leitet die fünf Körper aus dem **rechtwinkeligen Dreiecke** als **ihrem Elemente** ab, und zwar bestimmt er den Würfel, indem er vier gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke mit den Scheiteln der rechten Winkel zu einem Quadrate zusammenlegt, die übrigen Körper aber aus einem ungleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse doppelt so gross ist als die kleinere Kathete.

Aus der Lehre der Pythagoräer, dass das Wesen aller Dinge aus Zahlen bestehe, ging auch ihre eigenthümliche Weltanschauung hervor. Sie dachten sich das Weltgebäude als Kugel, in deren Mitte das Centralfeuer. Um dieses sollten zehn Himmelskörper, von Osten nach Westen sich bewegend ihren Reigen schlingen und zwar in der weitesten Entfernung der Fixsternhimmel, ihm zunächst die fünf Planeten, hierauf Sonne, Mond, die Erde mit der Gegenerde, welche die Pythagoräer ersannen, um die ihnen heilige Zahl Zehn vollzumachen. Die äusserste Gränze der Welt aber sollte durch das Feuer des Umkreises gebildet werden.

Unter diesen Weltkörpern nimmt das Centralfeuer nicht blos durch seine Lage die erste Stelle ein, sondern mit ihm hängt auch der Schwerpunkt und Halt des Ganzen zusammen, das Maass und Band der Welt, die ja überhaupt nur durch seine Einwirkung entstanden ist.

Eine Folge von der Bewegung der Gestirne ist die berühmte pythagoreische Lehre von der Harmonie der Sphären. Wie nämlich jeder schnellbewegte Körper einen Ton erzeugt, so müsse dieses auch bei den Himmelskörpern der Fall sein. Indem sie nun die Höhe und Tiefe dieser Töne zur Geschwindigkeit ihrer Bewegung, die Geschwindigkeit wieder zur Entfernung der einzelnen Gestirne und diese Entfernung den Tonintervallen der Octave entsprechend setzten, so erhielten sie die Vorstellung, dass die Gestirne durch ihren Umschwung um die Mitte eine Reihe von Tönen hervorbringen, die zusammen eine Octave, oder was bei ihnen dasselbe ist, eine Harmonie bilden. Macrobius berechnet den Umfang der himmlischen Harmonie auf vier Octaven und eine Quint, Anatolius auf zwei Octaven und einen Ton, und Plutarch erwähnt der Ansicht, die nachher

Ptolemaeus verficht, dass die Töne der sieben Planeten denen der unveränderlichen Saiten in der fünfzehnsaitigen Lyra entsprechen. Nach einer andern Ansicht sollten die Abstände der Planeten den fünf Tetrachorden des vollkommenen Systems gleichkommen.

Das Feuer des Umkreises hatte bei den Pythagoräern wohl hauptsächlich die Bedeutung einer das Weltganze umschliessenden Hülle, weshalb sie es die Nothwendigkeit genannt haben, wenn man nicht lieber annehmen will, dass sie bereits eine Ahnung von dem Vorhandensein einer Centralsonne hatten, von welcher unser Sonnensystem seine Bewegung erhält. Jenseits dieses Feuers liegt das Unbegränzte oder die unbegränzte Luft (πνεῦμα), aus welchem die Welt ihren Athem zieht. Dass es ein Unendliches dieser Art ausserhalb der Welt geben müsse, hat Archytas zu beweisen gesucht; aus ihm sollte ausser dem Leeren (dem Raume) auch die Zeit in die Welten treten, weil die Bewegung des Himmels und der Gestirne das Maass der Zeit ist.

Mit dieser Lehre war nun die Vorstellung von der Welt als einer Fläche, die von einer Halbkugel überwölbt ist, verlassen, und der Begriff von unten und oben war auf die grössere oder geringere Entfernung von der Mitte zurückgeführt. Das Untere oder der Mitte Nähere nannten die Pythagoräer die rechte, das Obere oder von der Mitte Entferntere die linke Seite der Welt, indem sie die Bewegung der Himmelskörper von Ost nach West als eine vorwärts schreitende Bewegung betrachteten und demnach der Mitte, wie es ihrer Bedeutung im Weltganzen zukam, den Ehrenplatz auf der rechten Seite der Weltkörper anwiesen. Im Uebrigen hielten sie die oberen Theile der Welt auch für die vollkommeneren, und indem sie den äussern Feuerkreis von den Sternenkreisen und unter diesen wieder die supra- und infralunarischen unterschieden, theilte sich ihnen das Weltganze in drei Regionen: in den Olympos, den Kosmos und den Uranos. Im Olympos sind die Elemente in ihrer Reinheit; der Kosmos ist der Ort der geordneten, gleichmässigen Bewegung, der Uranos der Ort des Werdens und der Veränderung. — In diesen Vorstellungen von dem Athemzuge der Welt, ihrer rechten und linken Seite ist die beliebte Vergleichung der Welt mit dem Menschen, des Makrokosmos mit dem Mikrokosmos deutlich zu bemerken.

Doch aus allen diesen Bruchstücken der Pythagoreischen Lehre, die gewiss viel ausgebildeter bestanden hatte, geht kein fester Anhaltspunkt, ja

nicht einmal eine Hindeutung hervor, wie sie sich das Wesen der Zahlen und ihre Identität mit den Dingen gedacht haben. Ob sie diese Behauptung wörtlich genommen und sich alles aus Zahlen zusammengesetzt gedacht haben, oder ob ihnen die Zahl die Beherrscherin der Formen und Ideen, daher der Maassstab und der künstlerische Verstand des weltenbildenden Gottes war, das lässt sich aus den uns bekannten Fragmenten nicht entscheiden. Mir schien nur das Eine klar hervorzugehen, dass ihnen das Verhältniss und der innere Zusammenhang der Zahlen mit den geometrischen Formen, also die Arithmetik mit der Geometrie viel genauer bekannt war, als wir es jetzt ahnen können, und dass sie in diesen gegenseitigen Beziehungen und aus ihnen die besonderen Eigenthümlichkeiten und das Wesen beider gesucht und so die wahre, d. i. mathematische Bedeutung der Zahlen erkannt hatten.

Ath. Kircherius.

Die wichtigsten Aufschlüsse über das Wesen und die Bedeutung der Zahlen, wie sie das Alterthum aufgefasst hatte, fand ich jedoch in des Athanasius Kircherius Werke „*Arithmologia, sive de abditis numerorum mysteriis.*“ *Romae MDCLXV. Superiorum permissu.* — Wiewohl ich Vielen, sowie im Vorhergehenden nur Bekanntes bringe, so erlaube ich mir trotzdem einiges aus dieser Schrift anzuführen, weil ich dadurch den Weg, den ich gegangen, am besten zu bezeichnen und zugleich das leichtere Verständniss meiner Arbeit am sichersten anzubahnen glaube.

Nachdem Kircher von dem Ursprung und der Bildung der Zahlen, von den verborgenen Eigenschaften einiger derselben, von den Amuleten und ihrer Anfertigung, von den gottlosen Zauberkünsten der Cabbalisten, Araber und Gnostiker gehandelt, gelangt er schliesslich zur Erklärung der wahren mystischen Bedeutung der Zahlen. In der Vorrede zu diesem Abschnitte heisst es:

Unter allem, was sich auf die Betrachtung göttlicher und menschlicher Dinge bezieht, scheint die mystische Bedeutung der Zahlen gewiss nicht den geringsten Platz einzunehmen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass in den Zahlen etwas der göttlichen Natur sehr Nahes verborgen ist, so dass die Natur zerstört sein würde, wenn man aus ihr die Zahl hinwegnähme. — **Alles Erschaffene athmet die Zahl.** Himmel und Erde, die Elemente und alles, was in der

Welt der Engel, des Menschen, der Sterne und in der Elementarwelt wohl geordnet und harmonisch ist — dieses Alles steht unter der Herrschaft der Zahlen. Doch will ich dieses nicht so verstanden wissen, als ob ich diese mystischen Zahlen auf das Göttliche mittelst gewisser materieller mathematischen Begriffe anwendete, sondern vielmehr durch die abstractesten und höchsten Verhältnisse der Zahlen, die nichts anderes andeuten, als eine einfache Analogie, durch welche wir die unbegreifliche Wesenheit der göttlichen Natur wegen der Schwäche unseres Geistes in schattenhafter Aehnlichkeit uns auszudrücken bemühen."

Die Monade oder die mystische Einheit.

„Die Einheit, sagt Trismegistus, ist der Anfang, die Wurzel und der Ursprung von Allem; die Monas enthält daher den Urgrund aller Zahlen, ist aber in keiner enthalten; sie zeugt jede Zahl, wird aber von keiner gezeugt." Ihm stimmt Boëtius bei, indem er sagt: „Alles, was von der ewigen Monade geschaffen worden ist, scheint nach Zahlenverhältnissen gebildet zu sein; denn dies war das Urbild (*principale exemplar*) im Geiste des Schöpfers; von hier ward die Masse der vier Elemente entlehnt, von hier der Wechsel der Zeiten, die Bewegungen der Sterne und die Umdrehung des Himmels." — Unter diesen Worten ist aber nichts anderes verstanden, als jene unendliche, untheilbare, Eine, einfachste Wesenheit der göttlichen Natur, die Idee aller Ideen, die Form aller Formen, kurz die ursprüngliche Monade aller erschaffenen Dinge; obwohl es den menschlichen Verstand weit übersteigt, wie aus jener himmlischen Einheit an sich und aus ihrer einfachsten Natur so unendlich viele Schöpfungen ohne irgend einen Verlust an ihrer untheilbaren Einheit hervorgehen konnten. Dieses ganze Geheimniss lässt sich nicht besser erklären, als unter irgend einer schattenhaften Aehnlichkeit, nämlich durch die Eigenschaften der materiellen Einheit; denn so wie alles aus dem göttlichen Geiste *(mente)*, so entsteht gewissermassen alles aus unserem Geiste; was Gott in der Schöpfung, das ist unser Geist *(mens)* in der Schaffung der Zahlen; der göttliche Geist unterscheidet alles, es unterscheidet auch alles unser Geist. Aber die Unterscheidung Gottes ist die Erschaffung der Dinge in eigenem Sein, unsere Unterscheidung aber ist nur die Schaffung von Zahlen, welche von der göttlichen Unterscheidung Aehnlichkeiten sind. Denn, wenn man die Einheit aufhebt, wird keine Spur der Zahlen bleiben; hebt man jedoch die

Zahlen auf, so bleibt die Einheit immer unberührt, welche, sowie sie der Ursprung aller Zahlen ist, so auch alle Zahlen nothwendig in sich enthält, weshalb sowohl die gerade als die ungerade, die grösste wie die kleinste Zahl in jener fruchtbaren Einheit so zusammenfallen, dass sie ohne irgend eine Veränderung oder Theilung ihrer selbst immer als in sich Eines auf unsagbare Weise besteht.

Das absolut Grösste ist hier nämlich nach Cusanus nichts anderes als das Grösste, über welches es kein Grösseres mehr geben kann, und es ist die unendliche, von keinem Menschen- noch Engelverstande *(intellectu)* begreifliche Wahrheit. Da ferner dieses absolut Grösste alles das ist, was sein kann, das absolut Kleinste aber das, über welches hinaus ein Kleineres nicht begriffen werden kann, so ist es einleuchtend, dass das absolut Grösste mit dem absolut Kleinsten zusammenfällt. Und dieses Grösste und Kleinste ist nichts anderes als Eines; daraus geht hervor, dass es die absolute Nothwendigkeit selbst und diese die Einheit ist.

Auf welche Weise die Einheit oder die Monas dreitheilig (*trina*) genannt werden kann.

Auf die Einheit folgt nach der Ordnung der Zahlen die Dyas, d. i. die Zwei, welche als eine gewisse Wiederholung und Wiederaufnahme der Monas nicht mit Unrecht die zweite Monade genannt werden kann; sie ist die erste und zwar einfachste Zahl, der äussere, erste und sichtbare Keim der Einheit und die Verdopplung der Monade, der Anfang jeder Vielheit, die vom menschlichen Geiste aufgefasst werden kann; durch sie wird in der That der fruchtbarste Ausfluss aller Geschöpfe von jener einfachen Monade der Gottheit bezeichnet, und so wie sie dem Bösen und der Unvollkommenheit unterworfen ist, so wird sie auch von den Hieromysten für das Symbol der verworrenen Dinge und für den Anfang der Uibel genommen; denn auf diese Weise ist ein Theil der Engel-Natur von der himmlischen Einheit abgeschnitten und getrennt und hat aller Uebel Schaar in die Welt gebracht. Daher haben auch die Philosophen die erste Materie durch die Dyas ausgedrückt; denn so wie Gott durch die erste Einheit in sich selbst in unveränderlicher und untheilbarer Wesenheit besteht, so wird die zweite Einheit oder die Wiederholung der Monade an Alter und an Einheit die Gott nächste genannt, weil es nur Eine Materie für alle sensiblen und körperlichen Dinge gibt als den ersten Entwurf eines jeden Gegensatzes, indem die erste Relation und Opposition nur in der Dyas geschieht. Die Dyas

ist also die zweite von der Monade abgeschnittene Einheit und die erste der geraden Zahlen; doch beschuldigen sie die Philosophen einer gewissen Bosheit, weil sie den ersten Rückzug *(recessus)* von der Einheit ausdrückt, die sie das Merkmal der Vielheit und Unvollkommenheit nennen; und da sie das Princip der Verschiedenheit, der Ungleichheit und der Unähnlichkeit, die Trennung von der Einheit und der erste Abfall von dem Einen ist, so wird sie nicht mit Unrecht von den alten Griechen, Aegyptern und Hebräern in jeder Disciplin für die Eintheilungszahl gehalten, weshalb von den Aegyptern der Streit und die Zwietracht der entgegengesetzten Dinge unter dem Mythus von Osiris und Typhon, der Wechsel der in der Natur kämpfenden Kräfte von den Magiern der Perser unter der Allegorie des Ariman und Orimazes dargestellt werden.

Die dreimalige Monas, d. i. die Trias ist nach dem Zeugnisse des Boëtius der Führer und das Haupt der ungeraden Zahlen, die vollkommene, unverletzte, vollendete, allgemeine, ganze Zahl. Denn sowie die Monas einfach ist ohne Gränze von aussen, die Dyas aber der theilbare und offene äussere Umkreis ohne die Einheit der Mitte, so umgreift die Trias in wunderbarer Umarmung die beiden früheren; denn sie bekleidet und verschanzt die Monas mit Hülfe der Dyas und verknüpft sie durch die äusserste Einheit der Dyas; und sowie die der theilbaren Potenz beigelegte, ihrer Natur nach ungetheilte Thätigkeit die Substanz derselben ganz zusammenschweisst und erfüllt, so erfüllt und vollendet die in die Dyas vorgeschrittene und aus deren Gränzen herausgenommene Monas die Zahl der Trias, weshalb sie mit Recht der Fürst der Zahlen, das Sinnbild der göttlichen Emanation, der Grund aller Betrachtung und Weisheit genannt wird; und wenn der ursprüngliche Bestand der Dinge in der Monade oder dem Punkte stattfindet, die Kenntniss und Erscheinung der bestehenden aber in der Dyas oder Linie, so wird die höchste Liebe und das festliche Geleite der erkannten und der höchsten Substanzen der Trias zukommen.

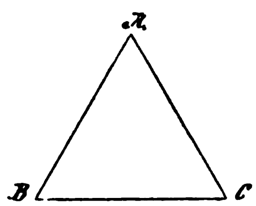
So wie daher aus der Monas durch Hinzufügung der Einheit die Dyas entsteht, so entsteht durch Addition der Monas zur Dyas die Trias, die aus dem Einen in das Eine zurückgeführte dreieinige Zahl, weil sowie die Einheit das Princip der Zahlen, ebenso das Dreieck die erste aller geradlinigen Figuren ist und aus dem Zweier und der Einheit entsteht; in den hieroglyphischen Pyramiden wird es durch $\triangle$ bezeichnet, welches von dem Punkte oder der Monade der Pyramide anfängt und durch die zwei Seiten sich zur Basis hin erstreckt, wo-

durch $\triangle$ gebildet wird, jene heilige, in den Schriften so vieler Alten gefeierte Trias, das wahre platonische Ideal der dreifachen Welt, jene wahre Wage der Pythagoreischen Gerechtigkeit, der Urgrund aller Zahlen, das Dreieck der göttlichen Natur, aller Unvollkommenheit und der mangelhaften Natur Vollendung, das Fundament der mystischen Pyramide, die Quelle und der Ursprung der Körper, die reichhaltigste Zahl für mystische Bedeutungen und verborgene Erklärungen der Dinge. Sie ist vollkommener als die gerade, da sie diese in sich fasst, von ihr aber nicht umfasst wird; daher ist sie die passendste Zahl der Gerechtigkeit, indem bei den geraden die Gerechtigkeit gleichsam aufgelöst ohne Mitte ist und keine Angel hat, auf welche sie sich stützen könnte; in der ungeraden aber ist über dem Einen selbst die Mitte, gleichsam als Centrum und Gottheit, wodurch die gleiche Eintheilung geschieht und zu welchem Zwecke sie herrscht. Das Ungerade besitzt auch, wie Plotinus mit Recht sagt, wegen seiner bindenden Mitte in sich das Band seiner selbst und ist das Grundprincip der gesammten Ordnung; denn im Dreier ist Anfang, Mitte und Ende.

Die dreifache Einheit wird so erklärt: Es hat nie eine Nation gegeben, welche Gott nicht verehrt und ihn für das einfach Grösste gehalten hätte. Pythagoras behauptete eine Dreieinigkeit, die er zur Anbetung aufstellte und welche die Aegypter **Hemphta** nannten und sie unter der Schlange-Kreis-Flügelfigur (sub figura ὀφι-κυκλο-πτερομόρφῳ) geheim ausdrückten.

Von der Einheit wird also die Gleichheit der Einheit negativ gezeugt, d. i. der Mangel der Ungleichheit, und aus diesen geht der Zusammenhang hervor. So ist die Zeugung der Einheit nichts anderes als die Wiederholung der Einheit; denn, wenn man die Einheit zwei- dreimal und so der Reihe nach genommen hat, so wird die Einheit schon aus sich ein Anderes hervorbringen, wie den Zweier, den Dreier oder irgend eine andere Zahl, welche geschaffenen Dingen zukommt. Die also im Göttlichen nur einmal wiederholte Einheit zeugt die Gleichheit der Einheit oder, was dasselbe ist, die Einheit zeugt die Einheit. So wird es klar, wie jener Ausspruch des Trismegistus zu verstehen ist: „*Monas genuit Monadem et in se ipsam suum reflexit ardorem.*“ So wie also die Zeugung der Einheit von der Einheit eine Wiederholung der Einheit ist, so ist der Fortgang von beiden die Wiederholung der entitativen und äquativen Einheit oder was dasselbe ist, der Zusammenhang und die Einigung der Einheit und der Gleichheit.

Man sieht also, wie die von der Einheit ausströmende Dyas eine gewisse Zweiheit annimmt, das wahre Symbol weltlicher Production, den Anzeiger des Guten und Bösen, sowie des Wechsels der Dinge in der Einrichtung der Welt. Wir sehen, wie das zum Einen gefügte Eine, mag es wie immer gestellt sein, immer einen sehr kleinen Zwischenraum verursacht, welcher die Stellung der zwei Einheiten ausdrückt und dasselbe in getrennter Grösse erweiset, was die Linie in fortlaufender; so wie man nämlich aus der Bewegung des Punktes das Entstehen der Linie begreift, so verursacht der vom Punkte getrennte Punkt den allerkleinsten Raum. Da ferner eine zu einer andern geneigte Linie durch ihre Durchschneidung einen Winkel bildet, was bewirkt sie anderes als irgend einen unbestimmten, jeder Oberfläche entbehrenden Raum? Fügt man ihm aber die dritte Linie hinzu, dann ersteht die geometrische dreieinige Einheit, nämlich **das Dreieck**, und so geschieht aus der Einheit die Rückkehr in die Einheit. Denn diese dreieckige Einheit ist die erste Einheit aller Flächen, die Quelle und der Ursprung aller geradlinigen Figuren; sowie nämlich die numerische Einheit das Abbild der göttlichen Natur, so ist diese erste geometrische Einheit der Typus und das Muster des dreieinigen Gottes. Dies



wird aus nebenstehender Figur ersichtlich. In dem gleichseitigen Dreiecke ABC bezeichnet die Einheit des Dreieckes die Einheit des göttlichen Wesens, die Gleichheit der von der Einheit unterschiedenen Seiten und Winkel aber bedeutet nicht unpassend die Einheit der in Natur und Wesenheit gleichen drei göttlichen Hypostasen. Sowie es also unmöglich ist, dass nach Wegschaffung einer Seite oder eines Winkels vom gleichseitigen Dreiecke das Wesen des Dreiecks bestehen bleibe, so kann im Göttlichen eine Hypostase ohne die andere nicht sein, ohne dass das Ganze zerstört würde. Wenn die erste Monas AB und die zweite Monas BC ist, so wird die Seite CA der Zusammenhang, die aus C nach A rückgewendete Monas sein, wodurch das Wesen der dreieinigen Gottheit passend ausgedrückt wird. Sowie aber die ausserhalb ihrer in die Vielheit ausgegossene Einheit den Unterschied aller Dinge und der von der himmlischen Einheit ausströmenden Production der Welt bezeichnet, so bezeichnet die geometrische dreiwinklige Einheit *(Monas)* die unzählige Menge und Mannigfaltigkeit der in der Welt erschaffenen Dinge. Wenn wir nun die gesammte Natur für vollkommen halten, so müssen wir dieselbe nach

den deutlichsten Anzeichen als eine dreifache erkennen, und da jedes Geschöpf ein im göttlichen Glanze strahlendes Werk des dreieinigen Schöpfers ist, so muss es gewiss die ihm eingedrückten Spuren der göttlichen Vollkommenheit und der heiligen Trias an sich tragen; denn alle Dinge, welche Gegenstand der Sinneswahrnehmung sind, sind gleichsam Spiegel, welche die Abbilder der dreieinigen Gottheit auf uns zurückwerfen, sind Stimmen, welche dem Echo gleich uns in geheimnissvoller Ahnung den Ruhm des dreieinigen Schöpfers singen.

Die allen Dingen eingeprägte Trias.

Die Ur-Dreinigkeit in Gott (Trinitas Archetypa)	Vater	Sohn	Heil. Geist.
In der Seele	Verstand (intellectus)	Gedächtniss	Wille
In den Stufen der Seele	die vegetative	die sensitive	die rationale
Im Verstande (in intellectibus)	der göttliche	der der Engel	der menschliche
In der Weisheit	die göttliche	die der Engel	die menschliche
In den Geistesvermögen (in intellectualibus)	Geist (mens)	Verstand (intellectus)	Vernunft (ratio)
In der Beweisführung (in ratiocinio)	Vordersatz	Nachsatz	Schluss
In der Bildung (eruditio)	Auffassung	Sprache	Schrift
In der Welt	die intellectuelle	die himmlische	die elementare
In der Sonne	Licht	Strahl	Wärme
Im Monde	Conjunction	Mitte	Opposition
Im Kreise	Mittelpunkt	Durchmesser	Umfang
In der Grösse	Länge = Linie	Breite = Fläche	Tiefe = Körper
In den Zahlen	die lineare	die ebene	die feste
In der Stellung der Menschen	liegen	stehen und gehen	sitzen
In den Pflanzen	Baum	Strauch	Kraut
In der Wolke	Regen	Schnee	Hagel
Im Baume	Blatt. Wurzel	Blüte. Stamm.	Frucht. Aeste.

Also ist es nach dem verbreiteten Sprichworte wahr, dass Gott an dem Ungeraden Wohlgefallen habe, und dass alles Dreifache vollkommen sei. Da also alle sichtbaren und unsichtbaren Spuren und Zeichen jener geheimnissvollen und unendlich erhabenen Einheit durch die Trias bezeichnet sind, so ist es gewiss folgerichtig zu glauben, dass jede erschaffene Trias aus der unerschaffenen Dreiheit, sowie das Gedachte aus der Idee ausgeströmt sei, obschon zwischen der geschaffenen und der ungeschaffenen Trias ein unendlicher Unterschied besteht. Denn sowie in dem Geschaffenen die Ungleichheit, die Theilung, das Früher und das Später mit einander verbunden sind, so erweiset es im Göttlichen die höchste Gleichheit, den höchsten Zusammenhang, die Identität und Ewigkeit, so dass im Göttlichen nichts als zeitlich, ungleich, getrennt und zerstückt, nichts als früher oder später, sondern alles als gleich, unendlich und ewig angesehen werden muss, dass also die Monas mit der Dreieck-Monas, das Dreieck mit dem Zirkel, der Zirkel mit dem Umfang und dem Centrum, das Grösste mit dem Kleinsten gänzlich zusammenfalle.

Die Geheimnisse der Tetras oder des Vierers.

Sowie im Vorhergehenden der Punkt durch die Monade beschrieben, der Zwischenraum der Linie aber durch die theilbare Dyas auseinandergehalten und der Flächenbreite die Trias beigelegt wurde, so ist jetzt noch übrig, dass in der körperlichen Fülle und in der Tiefe des Festen der Vierer beruhe, und hauptsächlich den Zwischenraum des Körpers auseinanderspanne und ausmesse. Denn der Vierer ist die erste körperliche und feste Zahl und bringt entweder die dreiseitige Pyramide oder den Würfel hervor. Jede der beiden Figuren entsteht auf verschiedene Weise. Die erstere auf folgende: Vier Punkte oder die im Vorhergehenden angezeigten vier Einheiten bestimmen die Scheitel ihrer Winkel; sechs Linien trennen und vertheilen; vier Flächen überziehen und decken dieselbe, endlich entsteht der unter den Marksteinen selbst verborgene und den Augen undurchdringliche Körper aus dem Vierer. — Wenn man den unter diesen Marksteinen 1, 2, 3, 4 ausgespannten Vierer zusammenfasst, so erhält man 10, die zweite Monade und den Halbmesser der Engel-Welt; wenn man den Zehner zum Quadrat erhebt, so entsteht alsbald 100, die dritte Monas, der Beginn des seelischen Chores *(animastici Chori)*; wenn

man endlich die zweite Monade in die dritte, d. i. 10 in 100 geführt hat, so wird der Cubus oder der feste Körper erstehen, der verborgene Behälter aller sinnlich wahrnehmbaren Dinge. Daher die einfachen Körper der vier Elemente, welche die vierfache Ordnung der Geschlechter: die Substanz, die Quantität, die Qualität, den Ort begleiten; der Substanz kommt die Zeugung und die Verderbtheit zu, der Quantität die Vermehrung und Verminderung, der Qualität die Bewegung der auf dem Entgegengesetzten beruhenden Abänderungen, mit dem Orte endlich stimmt die Erscheinung *(latio)* überein. — Darauf stützt und erhält sich die vierfache Ordnung der Dinge, der leblosen, der lebenden, der sensiblen und der vernünftigen.

Dies ist jene Pythagoreische Tetraktys, welche in allen Dingen gefunden wird. Das Chaos ist in vier Elemente getheilt, der Himmel in vier Theile oder Ecken, die Luft in vier Winde, der Thierkreis in vier Dreifachheiten; unter dem Himmel gibt es vier Qualitäten der Zeiten, unter den Qualitäten vier Elemente, unter den Elementen die Substanz, die Quantität, Qualität, Bewegung, unter der körperlichen Substanz das Entitative, das Pflanzliche, das Sensitive und Intellective; die Quantität theilt sich in den Punkt, in die Länge, Breite und Tiefe, die Qualität in vier, das trockene, feuchte, kalte, warme; die Bewegung in die aufsteigende, absteigende, gerade, kreisförmige. Die Erde wird in vier Räume eingetheilt. Ueberdies sagt man nicht mit Unrecht, dass die Tetraktys alle Dinge in sich schliesse, da der Vierer, zumal seiner Macht nach als Zehner die vollkommenste und absoluteste aller Zahlen, die Idee aller Dinge ist über die hinaus keine andere Zahl gefunden wird.

Diese vierfache Einheit soll hier auseinandergesetzt werden. Die erste ist die einfachste oder die monadische (Μοναδικὴ) Einheit, die zweite die dekadische (δεκαδικὴ) oder Zehner-Einheit, die dritte die hekatontadische (ἑκατοντα-δικη) oder die Hunderter-Einheit, die vierte die chiliadische (χιλιαδικὴ) oder die Tausender-Einheit. Die erste fasst die einfachste und ungetheilte Einheit in's Auge, nämlich 1; die zweite betrachtet die Zehner-Einheit, welche auch die Wurzel der folgenden heisst und 10 ist; die dritte die Hunderter-Einheit, sie ist die Quadratur der vorhergehenden Zehner-Einheit, nämlich 100; die vierte — 1000 — bezieht sich auf die Tausender-Einheit und ist der Cubus der vorhergehenden Zehner-Einheit. So wie diese vier Monaden den Ausfluss des Punktes in die Linie, der Linie in die Fläche, der Fläche in den Körper schön

erklären, so kann die erste die centrale Monas (die Punkt-Monade), die zweite die Flächen-Monas, die dritte die Quadrat-Monas, die vierte die Körper-Monas mit Recht benannt werden. Und da auf solche Weise die zwei Extreme festgesetzt sind, nämlich die Einheit und der Tausender, so bestimmten die Pythagoräer alle übrigen Zahlen durch die Annäherung oder Entfernung von ihnen. Dies ist jene mannigfache und geheimnissvolle Tetraktys des Pythagoras. — Die Einheit ist ohne Theilung und wie der Punkt; der Zehner mit einfacher Theilung, denn er ist gleichmal ungleich und wie die Linie; der Hunderter mit doppelter Theilung und wie die Fläche, denn er wird in 50 und 50 getheilt, 50 wieder in 25 und 25; der Tausender aber mit dreifacher Theilung und wie der Körper, denn 1000 wird zuerst in 500 und 500 getheilt, hierauf 500 in 250 und 250, 250 wieder in 125 und 125, und hier hört die Theilung auf. Sowie also die Monas jeder Theilung bar ist, so wird die nur Eine Theilung zulassende 10 passend den Intelligenzen beigelegt, 100 mit zweifacher Theilung zeigt die Seele, 1000 aber mit dreifacher Theilung die Körperwelt.

In der Monadischen Einheit betrachten wir den einfachsten Geist (*mentem*), die alles schaffende göttliche Wesenheit; in der zweiten, der Wurzel-Einheit, die Intelligenz der Engel; in der quadrirten Einheit die Seele, in der cubischen endlich schauen wir den Körper, so zwar, dass wir in diesen vier unterschiedenen Einheiten die in ihnen unterschiedenen Verhältnisse der Eigenschaften erfahren. — Die erste Einheit ist gleichsam das Vorbild aller, das jeder Vielheit und folglich jeder Zweiheit, Gegenstellung, Ungleichheit, Theilung Vorangehende, und obschon eine solche Einheit weder der Zweier, noch der Dreier, noch der Vierer ist, so ist sie doch alles das, was der Zweier, Dreier, Vierer und so weiter ist. Wenn die Arten der Dinge wie die Zahlen unterschieden werden sollen, so gehört die absolute Einheit selbst zu keiner Art, zu keinem Namen, zu keiner Gestalt, sondern sie ist Alles in Allem; denn sie ist die Einheit der ganzen Vielheit der Gattungen, der Arten, der Substanzen, der Ereignisse, der gesammten Geschöpfe, das Eine Maass aller Maasse, die Eine Gleichheit alles Gleichen und Ungleichen, der Zusammenhang alles Geeinigten und Geschiedenen, gerade so, wie die Einheit sowohl jede gerade als ungerade Zahl in ihrer Einfachheit einschliesst, erklärt und verknüpft; die Einheit von unendlicher Macht, die unaussprechliche Einheit, und erst, wenn du von ihr alles abgesondert hättest, wenn du einsähest,

dass niemals ein anderes gewesen oder ist oder werden kann, wenn du jede Vielheit beseitigen und in die einfachste Einheit selbst nur ein wenig eindringen würdest, so dass du sie nicht mehr als einfach, denn als nicht einfach, nicht mehr als Eine, denn als nicht Eine erfasst hättest: so würdest du alle Geheimnisse erforscht haben.

Die zweite, die dekadische Einheit bezieht sich auf die Intelligenz der Engel; da diese zuerst von jener unendlichen Einheit ausgeht, so muss sie nothwendig in die Mischung der intellectuellen Zusammensetzung eintreten. Sie ist aber die Zusammensetzung von dem Einen und von dem Anderen, d. i. von Entgegengesetztem, das ihr nicht vorangeht, sondern zugleich in ihr entsteht, und in ihrer Einfachheit als Wurzel ungetheilt und unauflöslich verbunden wird; denn die Zehner-Einheit ist ohne Wurzel; ihr geht ausser der ersten keine Einheit voraus, aus deren Multiplication sie entstünde, da sie allein zuerst ihren Ursprung nimmt. Indem die schöpferische Einheit sich auf das Handeln verlegte, zeugte sie zuerst die Dyas, welche die dekadische Monas ist oder die intellectuelle Welt, das absolute Bildniss und unmittelbare Vorbild Gottes, die letzte Ergänzung der Zehnzahl.

Die dritte, die Hunderter-Einheit ist die Zahl der seelischen *(animasticae)* Intelligenz, die sie durch das Quadrat erklärt. Die Intelligenz ist die Zahl der absoluten Einheit oder der ersten Monade; denn die Einheit der Intelligenz wird in der Seele gezählt, während sie durch Multipliciren zusammengezogen wird. Gott ist das Licht der Intelligenz, weil ihre Einheit; die Intelligenz aber ist das Licht der Seele, weil ihre Einheit und die körperliche Form der Einheit die Zahl der Seele ist. Die Einheit der Seele nehmen wir nicht an ihr selbst, sondern in ihrer körperlichen Erforschung sinnlich wahr; auf gleiche Weise nehmen wir die Intelligenz nicht an ihr, sondern in der Seele, auch nicht die erste, einfachste, absoluteste Einheit, wie sie an sich ist, sondern in der Intelligenz selbst als in ihrer Zahl und in ihren Zeichen wahr. Die Vernunft ist daher nicht wie die Wurzel des cubischen Körpers, sondern als das Medium zu betrachten, durch welches die intellectuelle Wurzel in den Körper herabsteigt, denn sie ist das Werkzeug des Verstandes und so das Princip oder die instrumentale Wurzel der körperlichen Dinge.

Die vierte, die Tausender-Einheit schliesslich ist die letzte und die sinnlich wahrnehmbare Entwicklung der Einer. So wie aber der Tausender aus vielen zusammengesetzt ist, so ist es auch diese Einheit. Die erste Einheit ver-

hält sich also nach Art des Punktes, die zweite nach Art der Linie, die dritte nach Art der Fläche, die vierte nach Art des Körpers oder Würfels. Die Einheit des einfachsten Punktes ist alles das, was in der linearen, in der Flächen- und Körper-Einheit ist, und die Flächeneinheit erklärt alles das, was in der körperlichen Einheit ist. Die drei vorhergehenden Einheiten sind nur wahrnehmbar und unterscheidbar durch den Geist *(mens)* selbst, welcher allein den Punkt, die Linie und die Fläche abgesondert in Betracht zieht; der Sinn *(sensus)* aber berührt blos das Körperliche. Wenn daher Jemand sich bemühen wollte, durch das Sinnliche das Geistige zu messen, der würde dasselbe thun, was jener, der mit einem festen Körper den Punkt, die Linie oder die Fläche zu messen versuchte, er würde unklug, um nicht zu sagen thöricht handeln. Alles Sinnliche ist daher zur Vernunft *(ratio)* emporzuheben oder zur Intelligenz oder zur absoluten Einheit.

Die Mysterien vom Fünfer, Sechser, Siebener, Achter und Neuner.

Der Fünfer resultirt aus der zum Vierer hinzugefügten Einheit und ist das Symbol aller materiellen und sublunarischen Substanz, welche gewöhnlich aus fünf Theilen besteht; denn aus der viertheiligen Zusammensetzung des elementaren Stoffes und aus einem einzigen substantiellen Acte erhebt sich alle sinnlich wahrnehmbare Substanz und Natur. Desgleichen enthält alles sinnlich Wahrnehmbare fünf Körper, vier Elemente und den Himmel oder die fünfte Wesenheit, wie die Peripatetiker wollen. — Sowie ferner der Fünfer die erste der in sich wiederkehrenden *(orbicularium)* Zahlen ist, so misst er einzig und allein deren Beziehungen *(lationes)*; denn alles, was sich im Kreise dreht, kehrt erst im fünften Orte oder Punkte in sich selbst zurück und vereinigt sich mit dem Anfang, von dem es ausgegangen ist. Auf solche Art kehrt die von Osten ausgegangene Sonne im fünften Orte nach der Ostseite zurück. Der Fünfer ist also das Symbol des Sinnlichen, wozu der Stoff, die Thätigkeit des Seins, die Lebensthätigkeit, die sensitive Thätigkeit, die Vernunftthätigkeit gehört.

Die Aegypter sollen zuerst durch die Fünfzahl die fünf Geschlechter der lebenden Wesen bezeichnet haben, wie Plutarch berichtet, welcher der dreigestaltigen Gottheit den ersten Platz einräumt, den zweiten den Genien, den dritten den Heroen, den vierten den Menschen, den fünften den Thieren. Plato sagt im

Epinomides, dass der Fünfer das eigentliche Symbol jener fünf Orte sei, die lebende Wesen fassen. Der oberste ist der empyreische, der zweite der ätherische, der dritte der luftige, der vierte der wässerige, der fünfte der irdische. Im ersten, sagt er, wohnen die Feuer-Geschöpfe, im zweiten die Aether-Geschöpfe, im dritten die Luft-Geschöpfe, im vierten die Wasser-Geschöpfe, im fünften die Erd-Geschöpfe; diesen entsprechen eben so viele Bewohner der Welt: die Menschen, die Vierfüssler, die Schleicher, die Schwimmer und die Fliegenden; dies alles stellten sie hieroglyphisch durch eine vielgestaltige, auf einem viereckigen Sitze thronende Gottheit dar, in deren Saume man fünf gehenkelte Kreuze eingewebt sah. Ueberdies drückten sie durch den Fünfer sowohl die fünf Erkenntnisse der Seele, als auch ihre Objecte aus, denen eben so viele äussere Sinne beigefügt wurden, das Gesicht, das Gehör, der Geschmack, der Geruch, der Tastsinn, und diesen entsprechen eben so viele Glieder oder Organe des Körpers.

Es ist daher nicht wunderbar, dass die Pythagoräer dem Fünfer eine so grosse Kraft beigelegt haben, dass sie mit seiner Hülfe die Zusammensetzung der Seele erfassen wollten; denn sowie der Fünfer die Mitte des Zehners ist, so ist die Seele die Mitte aller aufgezählten Classen.

Daraus geht offenbar hervor, wie die theils an der untheilbaren und unveränderlichen Natur, theils an der theilbaren und wandelbaren körperlichen Natur theilhabende Seele den mittleren Platz einnimmt. Ausserdem wird der Fünfer nach der Beobachtung der Pythagoräer die circuläre oder sphärische Zahl genannt und bezeichnet die Natur des Kreises; sowie dieser immer in sich zurückkehrt, so auch der Fünfer, indem die übrigen mit sich selbst multiplicirten Zahlen in ihrem Aufsteigen immer mit anderen endigen, und nur der mit sich selbst multiplicirte Fünfer und Sechser immer wieder zum Vorschein kommen.

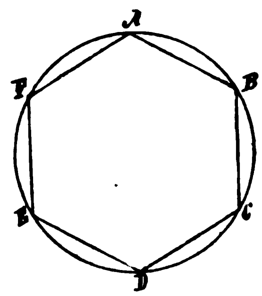
Circulation des Fünfers.	Circulation des Sechsers.
5	6
25	36
125	216
625	1296
3125	7776
15625	46656
78125	279936

Man sieht also, dass die Multiplication des Fünfers und Sechsers bis in's Unendliche fortgeführt immer die Wurzel (an der Einerstelle) wiedergibt, weshalb der Fünfer mit Recht in der ganzen Zahlen-Oekonomie den Vorrang behauptet; er ist daher das absolute Symbol der Umwendung der Seele (*revolutionis animae*), wodurch sie, nachdem sie durch alle Ordnungen der Wesen hindurchgegangen, mittelst der rückgewendeten Thätigkeit sich selbst wieder erstattet wird. Darin ist er durchaus dem Kreise gleich, dessen ganzes Ende der Anfang und dessen Letztes das Erste ist, d. h. immer dasselbe.

Der Sechser entsteht aus der verdoppelten Trias und ist in der heil. Genesis das Symbol der sechs Abtheilungen (*hexameron Symbolum*).

Sowie der Fünfer die äussere Erkenntniss der Sinne unterscheidet und zählt, so nimmt auch der Sechser alle materielle Erkenntniss zur Vertheilung und Zählung in sich auf, er ist der Coryphaeus unter den vollkommenen Zahlen. gebildet aus der Multiplication der Dyas in die Trias. Er bezeichnet die Umwendung der vier Einheiten zur absoluten Einheit, denn das in sich selbst kreisförmig zurückkehrende Vorschreiten wird nach dem Sechser gezählt. Die absolute Einheit fällt daher mit der absoluten Unendlichkeit, die intellectuelle Einheit mit der intellectuellen Unendlichkeit, die rationale Einheit mit der rationalen Unendlichkeit und die sinnliche Einheit mit der sinnlichen Endlichkeit zusammen. Jede Einheit ist untheilbar und unverletzlich; folglich ist die absolute Einheit nur in der intellectuellen Zweiheit (*alteritas*), die intellectuelle Einheit nur in der rationalen Alterität und die rationale Einheit nur in der sinnlichen Alterität der Mittheilung fähig. Daher kann man sich Gott, welcher die absolute Einheit ist, nur auf intellectuelle Weise, der Intelligenz nur auf rationale Weise, der Vernunft nur auf sinnliche Weise nahen. Die absolute Einheit steigt also in die intellectuelle Unendlichkeit, die intellectuelle Einheit in die rationale Unendlichkeit, die rationale aber in die sinnliche herab; und umgekehrt steigt die sinnliche Einheit zur rationalen, diese zur intellectuellen, diese endlich zur supramundanen und unendlichen Einheit empor. Dies wird zweckmässig durch den Sechser angedeutet; denn der Anfang der ausfliessenden und das Ende der rückfliessenden Einheit fallen in der absoluten Einheit zusammen; es fallen auch das Ende der fliessenden und der Anfang der rückfliessenden Einheit in der sinnlichen Einheit zusammen und die in der Mitte stehenden werden verdoppelt, so dass vier

Marksteine des Ausflusses und des Rückflusses mit den zwei mittleren gerade den Sechser ausmachen, wie es nebenstehende Figur zeigt. Es sei A die



absolute Einheit, B die intellectuelle, C die rationale, D die sinnliche Einheit, in welcher der Fluss der absoluten Einheit aufhört und der Rückfluss der sinnlichen Einheit beginnt, durch Aufsteigen aus dem sinnlichen D in das rationale E, aus diesem in das intellectuelle F und endlich in die absolute Einheit; und sowie die unter der Circumferenz ausgespannten sechs diametralen Sehnen den Umfang des Kreises vollkommen messen und erfüllen, so verknüpft der Sechser durch das Auf- und Niedersteigen der kreisenden Einheit Anfang und Ende. Daraus geht hervor, dass das Niedersteigen des Lichtes nichts anderes ist als das Aufsteigen der Finsterniss und dass das Sein Gottes in der Welt dasselbe ist als das Sein der Welt in Gott.

Man sieht daher, auf welche Weise dem Sechser das Maass der Beständigkeit zugeschrieben wird, und wie das Allgemeine in das Besondere, das Besondere in das Allgemeine zurückkehrt. Demnach ist es nicht wunderbar, wenn die Aegypter diese Zahl so sehr verehrt haben, dass sie mit ihr den Thron der höchsten vielgestaltigen Gottheit bezeichneten.

Der Siebener ist die Umwendung der durch sechs Tage *(Hexameron)* die Welt schaffenden Monade zur Einheit der Ruhe oder des Sabbates. Deshalb behauptet der Siebener, die heiligste und geheimnissvollste Zahl, in den Orakeln einen so ehrwürdigen und erhabenen Ruhm, dass er unter allen im Zehner enthaltenen Zahlen ein besonderes und Ausnahms-Verhältniss vor den übrigen hat. Denn einige Zahlen bringen hervor und werden nicht hervorgebracht; andere werden hervorgebracht und bringen nicht hervor; andere thun beides — der einzige Siebener bringt weder eine hervor, noch wird er durch irgend eine hervorgebracht. Denn sowie die Einheit der Anfang aller Zahl ist, so zeugt sie, selbst von keiner gezeugt, alle folgenden. 2, 3, 4 erzeugen demnach 4, 6, 9, 10, werden aber nicht gezeugt; hingegen 4, 6, 8, 9, 10 zeugen nicht, sondern werden gezeugt; der Siebener aber zeuget nicht und wird nicht gezeugt, da er weder unterhalb seiner eine Zahl hat, von der er gezeugt werden könnte, noch auch innerhalb des Zehners eine ist, die ihn zeugen könnte. Deshalb war er bei den Pythagoräern das Symbol des Führers und Lenkers aller Dinge und Plutarchus sagt: „*Est Dux et princeps rerum omnium Deus, semper unus, stabi-*

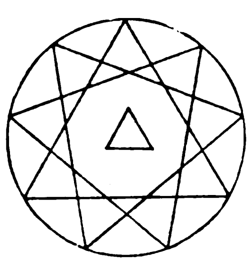
lis, motu carens, ipse sui similis, aliorum dissimilis, septuplo entium choro stipatus." Aus diesem Grunde haben die Pythagoräer den Siebener der aus Jupiters Haupte gezeugten, immer jungfräulichen, ohne Mutter gebornen Minerva als Symbol beigelegt; ihn haben die Aegypter auf das höchste verehrt, indem sie ihn als das Siegel aller Dinge aufstellten. Denn er bezeichnet im Universum sieben Gattungen der Wesen, in der oberen Welt sieben Haupt-Geister (*Principes Spiritus*), im Thierkreise des Firmamentes die sieben Configurationen der Sternbilder unter einander, im Planeten-Himmel die sieben Wandelsterne, in der Elementarwelt eben so viele Gattungen Metalle, im Mikrokosmus eben so viele Hauptglieder, am Monde sieben Phasen und die Umlaufzeit von viermal sieben Tagen, im Wachsthume des Menschen die sieben Altersstufen, in der Vollendung des Fötus die sieben Zeiten und unzähliges Andere, was dem Maasse des Siebeners untersteht.

Da also die Aegypter das ganze Universum durch die Siebenzahl bezeichnet sahen, so hielten sie es für unmöglich, dass nicht in ihr ein ausserordentliches Mysterium liege. Daher haben sie dieselbe auf verschiedene Weise hieroglyphisch dargestellt, den himmlischen Siebener durch III ⊕, und den sublunarischen Siebener durch III ♆, d. i. den himmlischen durch drei Linien und einen viergetheilten Kreis, den sublunarischen durch drei Linien und ein Kreuz III ✱; wodurch sie geheim andeuteten, dass der Siebener oder die Universalkraft des höchsten Wesens sich dann offenbare, wenn er sich aus der Trias in die Tetras, und zwar zuerst in die himmlische und dann in die irdische bewege, und nach geschehener Umwendung sich selbst zurückgegeben wird. Dieses Mysterium wird uns durch die im Thronsaume des *supramundanen Osiris* eingegrabenen hieroglyphischen Charaktere schön dargestellt, wo sieben viergetheilte Kreise und eben so viele Kreuze der Reihe nach aufgestellt werden, denen drei kleine Linien vorangehen als Symbol der sieben in siebenfacher Reihe der Classen unterschiedenen Welten. So ist die erste Welt dargestellt durch III und ⊕, durch den viertheiligen Kreis, welche vier Theile der Welt sammt den voranstehenden drei Linien die sieben Hebdaden der Dinge dieser Welt ausmachen, und so haben sie nach der Ordnung den einzelnen vierspaltigen Welten drei Linien beigegeben, um im Geheimen die Classen der Dinge, aus denen besagte Welten bestehen, anzuzeigen. Dasselbe bezeichneten sie durch das Kreuz mit Hinzufügung der drei Linien, nämlich die Ausbreitung durch die Elementarwelt. Die

erste Welt, die urtypische (*Archetypum*), nannten sie Hemphta oder den supramundanen Osiris, die erste dreigestaltige Einheit der Dinge; die zweite Welt ist die der Engel, nach dem Dogma der Aegypter in sieben Classen getheilt, in welcher sich die Macht des supramundanen Osiris offenbart; die dritte Welt ist die materielle, gebildet aus sieben Planetensystemen; die vierte Welt ist die der leblosen Körper, getheilt in sieben Arten der Metalle; die fünfte ist die Pflanzenwelt, gleichfalls in sieben Classen eingetheilt; die sechste Welt ist die der sensitiven Natur, in sieben Classen geordnet; die siebente Welt ist der Mikrokosmus Mensch, in sieben Stände getheilt, nach welchem das höchste Wesen in sich selbst zurückkehrt.

Der Achter entsteht aus dem verdoppelten Vierer und ist der Führer der sinnlichen Cuben, der erste Cubus nach der Monade, indem die Monas, der Anfang jeder Vielheit, alle Herrschaft unter den regelmässigen Zahlen für sich beansprucht. Der Achter entspringt also aus der Quelle der Dyas, der ersten sinnlich wahrnehmbaren Zahl, denn $2 \times 2 = 4$, das erste sinnlich wahrnehmbare Quadrat und $2 \times 4 = 8$, der erste Cubus, wahrlich das passende Symbol der materiellen und der kleineren Welt; denn sowie die materielle Welt aus vier Elementen besteht, so scheint auch die kleinere Welt, der Mensch, ausserdem dass er aus der Combination der vier Elemente gebildet wird, hauptsächlich aus vier Dingen zu bestehen, denn die Seele selbst ist Substanz, Intelligenz, Sprache, Schrift. Bei den Aegyptern war der Achter das Symbol der acht Genien oder Hauptgottheiten, durch welche die siebenfache Welt regiert wird.

Der Neuner resultirt aus der mit sich selbst multiplicirten Trias, ist daher um so geheimnissvoller, da er die Trias dreimal in sich schliessend, das Quadrat der Trias ist. Er ist das passendste Symbol der von Gott unmittelbar geschaffenen Substanz der Engel und ihrer neunfachen Unterscheidungen in die himmlischen Reihen. Dies geht aus nebenstehender Figur klar hervor, in welcher die göttliche und unermessliche Dreieinigkeit, die einfachste und untheilbare Einheit, in ihrer Bewegung nach aussen sich verdreifachend, drei hierarchische, in je drei Chöre vertheilte Monarchien der intellectuellen Geister (*mentium*) hervorgebracht hat, welche, mit dem Zeichen der Trias bezeichnet, das erste, nächste und unmittelbare Bild derselben in sich ausdrücken, welches auch der Mensch in vier inneren



und fünf äusseren Kräften wiedergibt. Dies alles wird durch diese Enneas so schön dargestellt, dass selbst die Heiden daran gedacht zu haben scheinen, indem sie die neun Musen als vorstehende Intelligenzen der Himmelskörper aufgestellt haben, um die Harmonie der Welt anzuzeigen; auch die Mecubalim der Hebräer haben darauf Rücksicht genommen, indem sie durch diesen dreifachen Neuner die dreifache Welt, die der Engel, der Gestirne und die materielle Welt (*hylaeum*) angedeutet haben.

Seraphin	*Mens*	*Urania*
Cherubin	*Intellectus*	*Polyhymnia*
Throni	*Ratio*	*Euterpe*
Dominationes	*Imaginatio*	*Erato*
Potestates	*Auditus*	*Melpomene*
Virtutes	*Visus*	*Terpsichore*
Principatus	*Olfactus*	*Calliope*
Archangeli	*Gustus*	*Clio*
Angeli	*Tactus*	*Thalia.*

Die durch Zahlen ausgedrückten Ketten der natürlichen Dinge.

In der Natur wird auch ein anderes Geheimniss gefunden, welches nur durch Zahlen erklärt werden kann. Es ist ein dem Urbilde (*Archetypus*) entnommener Plan, durch welchen die schaffende Weisheit die einzelnen Ordnungen der Wesen so an die Zahlen gefesselt hat, dass sie alsdann in viele Classen zerfallen, und man aus ihrer numerischen Constitution erkennen kann, zu welcher ein jedes gehört. Und dieses wird besonders im Haushalte der Pflanzennatur beobachtet. Es sind sieben Glieder der Pflanzen: Wurzel, Stengel, Rinde, Blätter, Blüten, Frucht und Samen. Einige Pflanzen haben nur Eine Wurzel, wie wie man es bei sehr vielen Zwiebeln, Rüben und anderen Pflanzen sieht. Andere spalten sich in zwei Wurzeln, wie die *Orchideen*, die *Mandragora*, *Gentiana*; andere bekommen eine dreifache Wurzel, wie das *Helenium* und ähnliche.

Bei einigen Pflanzen gibt es Stengel, deren Internodien in einem gewissen Verhältnisse der Länge wachsen und abnehmen, wie die *Valeriana Phu*, das *Erythrodanum*, *Equisetum*, *Sambucus;* bei andern sind die Stengel rund, dreikantig, vierkantig, wie bei *Mentastrum aquaticum*, *Ulmus scabiosa* und anderen. Wenn wir die Bildung der Blätter der Zahl nach betrachten, so fin-

den wir in dieser Beziehung einen ungeheuern Unterschied; einige haben nur Ein Blatt, andere drei, vier Blätter, dann fünf, sechs Blätter u. s. w., kurz es besteht eine nach der natürlichen Zahlenreihe gebildete Vielfältigkeit der Blätter.

Wunderbar ist, was bei dem *Equisetum* beobachtet wurde. Diese Pflanze hat einen in verschiedene Internodien getheilten Stengel, aus denen unter beständiger Gleichheit der Winkel je 24 Blätter so genau hervorwachsen, dass der Stengel, wenn er sich zur Aequinoctialhöhe und zur süd-nördlichen Stellung wendet, nicht unpassend eine Uhr abgibt, welche die Aequinoctialuhr heisst, bei welcher der mitten hindurchgehende Stengel durch seinen Schatten auf den Blättern die Stunden, welche die Blätter bezeichnen, angibt — ein wunderbares Naturspiel.

Die Blüten haben das Eigenthümliche, dass sie, je nach den verschiedenen Species, unter einer bestimmten Zahl ihre eigene Species zeigen. In der Feige ist Blatt, Blüte, Frucht dasselbe. Fast alle Blüten haben eine bestimmte Anzahl Blätter, deren strahlenförmige Anordnung vom Centrum zum Umfange eine wunderbare Schönheit der Blumen bewirkt. Es gibt Blumen mit 2, 3, 4, 5 Blättern bis in's Unendliche, einige erhalten ihren Namen von der Blätterzahl, was auch bei den Früchten und Samen der Fall ist.

Ganz auf ähnliche Weise spielt die Zahlen-Natur im Krystall, im Topas, Amethyst und den übrigen Edelsteinen, welche die Natur in die Gestalt des dreiseitigen Prisma, des Tetraëders, des Hexaëders, des Dodekaëders und des Ikosaëders zusammengefügt hat.

Auch im Thierreiche spielt die Zahlenverschiedenheit bei den Farben. So sehen wir bei den Thieren, besonders aber bei den Vögeln, einige mit Einer Farbe, andere mit zwei, drei, vier Farben, manche auch mit unzähligen Farben geschmückt. Wenn nun die Dinge nach der Identität der Zahlen in Classen eingereiht werden, so werden sie Ketten liefern können, welche die Anzeiger grosser Dinge in der Natur sind.

Die mystischen Ketten der Zahlen.

Wir haben oben gesagt, dass der Ausfluss des göttlichen und schöpferischen Geistes *(mentis)* aus jener supramundanen Ur-Einheit geschehen ist, zuerst durch die drei-eine Trias nach innen, von Ewigkeit her; in jenem unaussprechlichen Punkte der Ewigkeit aber nach aussen durch den Vierer in

den Umkreis der ganzen körperlichen Natur und die einzelnen Ordnungen der geschaffenen Dinge durch eben so viele vorstehende Intelligenzen. Und zwar zuerst in die materielle oder elementare Masse; denn Alles, was von den Körpern materiell und den Sinnen zugänglich ist, besteht aus jenen vier Ur-Elementen aller Dinge.

Kette des Dreiers. Durch diesen in den Intelligenzen der Engel verdreifachten Ur-Vierer also hat sich die weltbildende (κοσμοτεχνίτης) Weisheit in den viergetheilten Umkreis begeben, indem sie die obersten, mittleren und untersten Wesen der Welt in übereinstimmendster Zahl in die vier Weltgegenden durch vierfache Dreiheiten, die feurige, die wässerige, die luftige und irdische vertheilt.

Kette des Vierers. Deswegen hat der göttliche Geist *(mens)* unter der Leitung der Sinne durch den Geist der Engel den Lauf des Jahres in vier Zeiten abgetheilt, denen in gewisser Beziehung die Altersstufen des Menschen entsprechen, damit das, was im Frühlinge seinen Lebensanfang genommen hat, im Sommer reife und gar werde, im Herbste die Früchte des zurückgelegten Lebens bringe, und zuletzt im Winter zu seinem Untergange fortgehe, um beim Beginn des nächsten Frühlinges zu seiner Wiedergeburt zurückzukehren. Ein solcher Ausfluss geschieht aber in die vierfache Stufe der Natur, der unbelebten, pflanzlichen, sinnlichen und rationalen, deren Erhaltung von den vier ersten Elementarzuständen, warm, nass, kalt, trocken abhängt.

Kette des Siebners. Die Natur erfreut sich am Siebner. Denn die urtypische Welt *(Mundus Archetypus)* enthält sieben hohe Geister *(spiritus)*, welche im Angesichte Gottes stehend beständig die göttlichen Ideen betrachten, unter deren Schutz die sieben Planetengestirne zum Wohle des Universums geleitet und regiert werden. Am Firmamente lenken sie die sieben Sterne des Bären zum Vortheile der Schiffer; den Umlauf des Mondes vollenden sie auf gleiche Weise in einem Zeitraume von viermal sieben Tagen; durch ihre Hülfe schöpfen von der siderischen Welt die sieben Arten der Metalle, Gold, Silber, Eisen, Zinn, Kupfer, Blei, Quecksilber in der mineralischen Natur; in der Pflanzennatur die sieben Glieder: Wurzel, Stengel, Rinde, Aeste, Blätter, Blüten und Früchte ihre Nahrung. Im äusseren Mikrokosmus wachsen und gedeihen sieben Haupttheile: Kopf, Hals, Brust, Hände, Bauch, Weichen, Füsse; im

inneren aber sieben Gefässe des Lebens: Gehirn, Herz, Magen, Milz, Leber, Lunge, Nieren. Gott dringt durch die sieben Gaben des heil. Geistes wegen der sieben Werke der Barmherzigkeit in die Seelen, wodurch diese gestärkt und in die Gemeinschaft der Kinder Gottes aufgenommen, dorthin zurückkehren, von wo sie ausgegangen sind.

Kette des Zehners. Der Zehner ist harmonisch und unter allen am vollkommensten; denn er umfasst alle Unterschiede der geraden und der ungeraden Zahlen, alle harmonischen Verhältnisse, wie aus dem entwickelten Vierer ersichtlich ist, welcher dem Inhalte nach der Zehner ist, indem 1, 2, 3, 4 vereinigt den Zehner bilden; so betrachtet schliesst er alle Verhältnisse der fünf Harmonien ein, denn im Verhältnisse 2 : 1 findet man das doppelte, was in der Musik die διαπασῶν (Octave) heisst; aus 2 : 3 resultirt das $^2/_3$ Verhältniss, die διαπέντε (Quint), aus 3 : 4 das $^3/_4$ Verhältniss διατεσσάρων (Quart), aus 3 : 1 das Dreifache, διαπασῶν διαπέντε, endlich aus 4 : 1 geht das vierfache Verhältniss hervor, genannt δισδιαπασῶν. In diesen Verhältnissen ist nicht nur die künstliche Musik, sondern auch die der grösseren Welt enthalten, zugleich mit der der Engel und dem obersten Chorführer aller — Gott. Ehe nämlich ihr Werkmeister die Einheit den unteren Dingen mittheilte, ergoss er sich aus seiner Ur-Einheit (*archetypa*) in den Dreier und Vierer und endlich in den Zehner, gleichsam in die zehn Ideen und Maasse aller Zahlen und die Vorbilder der zu schaffenden Dinge. Denn über den Zehner hinaus kann es keine andere Zahl geben, als eine wiederholte; indem die Einheit zu ihrem Urgrunde zurückkehrt, vollendet der höchste Geist (*mens*) in Verbindung mit dem Neuner, den Zehner aller erschaffenen Dinge, welchen die alten Mythologen durch die neun Musen und den Apoll nicht ungeschickt ausdrückten. Auf solche Weise bilden die neun in drei Hierarchien abgetheilten Chöre der Engel mit Gott, der alles ergänzt, den Zehner; in den Wissenschaften der Encyklopädie erfüllen die neun Kategorien mit der Substanz den Zehner; in der Sittenlehre geben die zehn Vorschriften des Gesetzes die Ergänzung beider Gesetze.

Alles dieses bis jetzt Gesagte drückten die Weisen der Hebräer durch die zehn Numerationen (*Sephiroth*) aus. Diese nennen sie Emanationen und Gewänder Gottes, durch welche Gott nach aussen in der Erschaffung der Welt vorgeschritten ist, von denen sie die drei oberen die höchsten, geistigen und intellectuellen, auch das Werk des Wagens nennen,

wodurch sie auf den von Ezechiel beschriebenen mystischen Wagen der göttlichen Majestät hindeuten; die sieben unteren aber heissen das Werk der weltlichen Werkstätte. Und es gibt zehn göttliche Namen, von denen sie die drei ersten Emanationen, die sieben übrigen aber Attribute nennen und ihnen die Glieder des menschlichen Körpers anpassen, nicht weil zwischen uns und Gott irgend eine Aehnlichkeit der Gestalt oder Substanz, sondern nur eine gewisse Intention der Glieder bestehe. Eben deshalb werden Gott in der heiligen Schrift Herz, Augen, Ohren, Hände und Füsse angedichtet, nicht weil Gott irgend ein Verhältniss zu den Gliedern unseres Körpers zeige, sondern weil in ihm selbst, dem höchsten und unfassbaren Wesen aller Wesen, etwas Innerliches, durchaus Unaussprechliches (ἀνεκφώνατον) ist, aus dem Alles ausströmt, das den Grund der erhabensten, verborgenen und unerklärbaren Dinge bezeichnet, wovon die Gott uneigentlich beigelegten Glieder des menschlichen Körpers blosse Abzeichen und Bilder sind. Durch diese zehn Numerationen strömt Gott gleichsam wie durch gewisse Kanäle durch die Welt der Engel in die siderische, von da in die elementare und so in den ganzen Umfang der niederen Natur.

Die Tafel des Einströmens der 10 Sephiroth.

1. Kether. Corona		*Seraphim*		*Primi Mobilis*
2. Cochma. Sapientia		*Cherubim*		*Firmamenti*
3. Binah. Intelligentia		*Thronos*		*Saturni*
4. Gedula. Magnitudo		*Dominationes*		*Jovis*
5. Geburath Fortitudo		*Potestates*		*Martis*
6. Tiphereth. Pulchritudo	*influit in*	*Virtutes*	*et per hos in sphaerum*	*Solis*
7. Nizah. Victoria		*Principatus*		*Veneris*
8. Hod. Honor		*Archangelos*		*Mercurii*
9. Jesod. Fundamentum		*Angelos*		*Lunae*
10. Malchuth. Regnum		*Animasticum ordinem*		*Mundi elementaris.*

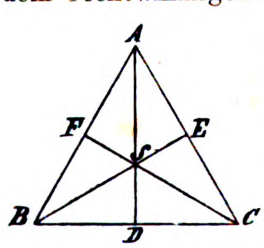
Dies ist die Beschreibung der zehn Numerationen oder Sephiroth, zugleich mit den 22 Kanälen, durch welche eine in die andere fliesst, und eben so viele Buchstaben sind im hebräischen Alphabete, nämlich 22. Und das System ist in drei Theile getheilt, von denen der erste die urtypische Welt zugleich mit der Engel-Welt, der zweite die siderische, der dritte die Elementarwelt anzeigt; auf diese Weise, sagen sie, strömt Gott durch seine Engel in die siderische Welt und von da in die elementare, und es gebe nichts in der urtypischen

und Engel-Welt, was nicht unter einer gewissen Analogie auch in der siderischen, elementaren Welt wäre und im Mikrokosmus.

Kette des Zwölfers. Der Zwölfer entsteht aus der Einführung der Trias in die Tetras, nämlich aus der göttlichen dreieinigen Monade in den Vierer der erschaffenen Natur; er scheint auch in die heiligen Schriften zur Bezeichnung der Gesammtheit der Dinge aufgenommen zu sein. Daher beschrieb der heil. Johannes die Stadt des himmlischen Jerusalem mit 12 Pforten und auf eben so viel Grundpfeilern ruhend, durch welches Mysterium er auf die Gesammtheit der zu Erlösenden hindeutet, und welches in der That zweckmässig bezeichnet wurde im Gesetze der Natur durch die 12 Stämme des Volkes Israël und im Gesetze der Gnade durch die 12 Apostel, welche das Evangelium durch die dreimal vier Theile der Welt zur Wiederherstellung des Heiles der Sterblichen ausgesäet haben.

Es bleibt noch zu erklären übrig, wie durch die bis jetzt genannten Zahlen Plato und die Pythagoräer das Weltall aufgefasst haben. Bekanntlich haben sich die Aegypter, um die Eigenschaften (*virtutes*) Gottes zu bezeichnen, sehr viel der geometrischen Figuren bedient, und ihnen sind hierin Plato und die Pythagoräer gefolgt. Namentlich beobachteten sie die Dreiecke, und zwar bezeichneten sie durch das gleichseitige Dreieck den Fortschritt der dreiförmigen Gottheit in die Körperwelt, durch das gleichschenklige ihren Fortschritt in die siderische Welt, und durch das rechtwinklige Dreieck, in welchem der eine spitze Winkel doppelt so gross ist als der andere, die Elementarwelt auf zweckmässige Weise.

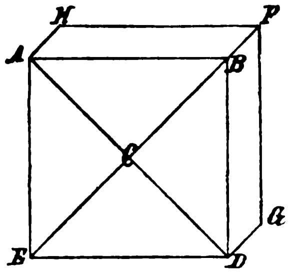
Plato leitet im Geiste der Aegypter die vier regelmässigen Figuren aus dem rechtwinkligen ungleichseitigen Dreieck auf folgende Weise ab. Zuerst wurde



ein gleichseitiges Dreieck beschrieben ABC, hierauf aus dessen Ecken auf die gegenüber liegenden Seiten Senkrechte gezogen AD, BE, CF, wodurch das Dreieck ABC in sechs ungleichseitige rechtwinklige Dreiecke zerfiel, wie dieses die Zahlen der Winkel zeigen; und zwar haben die Winkel um den Punkt S herum jeder 60, die an den Spitzen des Dreieckes ABC gelegenen je 30, endlich die an den Punkten D, E, F gelegenen je 90 Grade. (Die Seiten aller sechs Dreiecke verhalten sich wie 3 : 4 : 5).

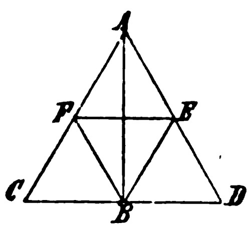
Ein solches rechtwinkliges ungleichseitiges Dreieck nun nannten sie bald ein genetisches, bald die hochzeitliche Figur, weil es das Princip der Zeugung aller sublunarischen Dinge wäre.

Der Würfel, das Symbol der Erde, wurde auf folgende Weise construirt:



Das gleichschenklige Dreieck *ABC* vervierfacht gab das Quadrat *ABDE.* Dieses sechsmal genommen bildete den Würfel *ABDEFGH*; so dass das gleichschenklige Dreieck nach dem Zeugnisse des Proclus das Grundprincip der Erde wäre, dem das Quadrat am nächsten stünde.

Die Pyramide oder das Tetraëder, das Symbol des Feuers, wurde so gebildet: Da das Tetraëder aus vier gleichseitigen Dreiecken besteht, von denen ein jedes wieder, wie oben gezeigt worden, aus sechs ungleichseitigen rechtwinkligen Dreiecken *(Scaleni)* zusammengesetzt ist, so entstanden $4 \times 6 — 24$ genetische Scaleni, und die dreiseitige Pyramide bezeichnet auf diese Art nicht allein das Feuer, sondern auch das ganze Universum, in welches sich die Macht des Feuers im Geheimen ergoss. Auf den Körper bezogen sie dies auf folgende Weise: Sie theilten das gleichseitige Dreieck



ACD in zwei ungleichseitige rechtwinklige Dreiecke *ABC* und *ABD*, womit sie das Vorschreiten der Gottheit aus der Ur-Welt *(ex mundo archetypo)* in die den Wandlungen und Veränderungen ausgesetzte Welt bezeichneten. Indem sie diese Dreiecke wieder durchschnitten, bildeten sie die Dreiecke *ABF* und *ABE*, die Anzeiger des Vorschreitens der Gottheit durch den siderischen Einfluss. Diese gleichschenkligen Dreiecke schnitten sie wieder durch die Linie *FE* und brachten so die vier gleichseitigen Dreiecke *AFE*, *FEB*, *CBF* und *BED* hervor, die zusammengefaltet das Tetraëder, den ersten aller festen Körper ergaben, wobei die Trias in die Tetras fortgeht, d. i. aus dem Dreieck entstand eine Figur von vier Flächen oder die dreiseitige Pyramide, und aus 3 Winkeln entstanden 12 Winkel, so dass sie in dieser einzigen Figur alle Reihen sowohl der siderischen als der elementaren Welt hatten. Das Dreieck drückte nämlich durch seine Trias die Entstehung der Dinge aus, die Vierzahl der Seiten bezeichnete die Elemente; drei und vier verbunden ergaben aber den Siebner der in den sieben Planetenkreisen er-

sichtlichen Sternenwelt, die zwölf Winkel bezeichneten die zwölf Dimensionen des Zodiacus; die Figur war zugespitzt und pyramidal, durch welche sie auf das Feuer oder die Wärme hindeuteten, das active Princip der Entstehung der Dinge, welches die Elemente, die Planeten, den Thierkreis, kurz Alles durchdringt.

Da ferner das Octaëder aus acht gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist, von denen jedes wieder aus sechs genetischen *(Scaleni)* besteht, so geben $8 \times 6 = 48$ Scaleni, durch welche das Octaëder gebildet wird, das Symbol der Luft.

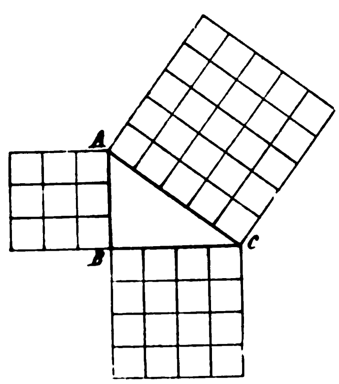
Da endlich das Ikosaëder aus 20 gleichseitigen Dreiecken besteht, ein jedes von diesen aber aus sechs genetischen, so geben diese zwanzigmal genommen 120 Scaleni, aus welchen gleichsam wie aus Grundfesten das Ikosaëder entstehet und deshalb zum Symbol des Wassers gewählt wurde.

Wir haben daher in der dreiseitigen Pyramide 24, im Octaëder 48 und im Ikosaëder 120 genetische Scaleni, aus deren Betrachtung Plato, von den Aegyptern und Pythagoräern belehrt, zur Kenntniss der gegenseitigen Verhältnisse der Elemente gelangte. Er hat auch angedeutet, dass die Proportion, welche in den Zahlen der genetischen Dreiecke besteht, nämlich 24 : 48 : 120, auch in der Dichtigkeit der Substanz, zwischen Feuer, Luft und Wasser herrsche, indem das Feuer zweimal so dünn sei als die Luft und fünfmal so dünn als das Wasser. Da aber der Cubus, das Symbol der Erde, aus einem anderen, nämlich dem gleichschenkligen Dreiecke gebildet wird, so könne er auch mit den drei anderen Elementen nicht verglichen werden; doch sei in ihm eine gewisse Harmonie, die Lenkerin der Welt-Harmonie verborgen, indem er aus 6 Flächen, 12 Linien, 8 Körperwinkeln, 24 ebenen Winkeln besteht, d. h. aus den harmonischen Proportionen 6 : 12, διαπασῶν; 6 : 9, διαπέντε; 12 : 8, διατεσσάρων; 8 : 24, die dreifache διαπασῶν διαπέντε; 6 : 24 endlich die vierfache δισδιαπασῶν.

Doch ausser diesen vier regelmässigen Körperfiguren konnte noch eine fünfte aus den Fünfecken construirt werden, von denen drei in eines zusammengefügt einen Körperwinkel bilden und so eine Figur von 12 Flächen oder das Dodekaëder ausfüllen, damit die natürlichen Körper den mathematischen vollkommen entsprächen. Dieses Dodekaëder legten die Pythagoräer dem Universum bei, nicht wie einige glauben, der fünften superlunaren Wesenheit. Da sie auf solche Weise sahen, dass zwölf gleichseitige Fünfecke, von denen ein jedes in fünf gleichschenklige Dreiecke getheilt wurde, so in Eines zusammengefasst werden

können, dass kein leerer Raum zwischen den Kanten übrig bleibt, und dass überdies die Fünfecke, wenn sie im Mittelpunkte eines Kreises verbunden sind, zwölf fünfseitige Pyramiden bilden, so setzten sie, das Geheimniss des Weltalls ahnend, in die zwölf Seiten des Dodekaëders zuerst die zwölf Stätten des Thierkreises, den sie selbst den Gränzstein des Universum nannten; denn diese gleichsam durch ein strahliges Einfliessen der Sterne im Mittelpunkte der Erde verbundenen Stätten bilden eben so viele fünfseitige Pyramiden als ein Symbol der zwölf inneren, durch welche die Gottheiten in die untere Welt einströmten. Auf gleiche Weise wird das Leben der Welt durch die Gottheiten, welche dem Dodekaëder des Thierkreises vorstehen, in dem Grade ausgegossen, dass nichts ist, was nicht daran Theil hätte. Sowie ferner der Cubus, das Symbol der Erde, aus gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt wird, eben so das Dodekaëder aus den Fünfecken, durch welches Geheimniss sie irgend eine verborgene Uebereinstimmung des männlichen Thierkreises mit der weiblichen Erde bezeichneten, aus deren Vereinigung Alles entstehen sollte.

Man sieht also, wie sie von den ersten und einfachsten Linien und Figuren zur Schaffung der Körper und zum Geheimnisse der ganzen körperlichen Natur vorgeschritten sind. Der ganzen Schöpfung Fundament ist das gleichseitige Dreieck, der Erzeuger aller Polygone und Körper; ihm folgt das gleichschenklige, als Symbol der Erde und des Firmamentes und diesem der Scalenus, um die höchsten Geheimnisse der schöpferischen Natur anzuzeigen, und zwar bezeichneten sie durch den constanten rechten Winkel das **unveränderliche Naturgesetz**, durch den Winkel von $^2/_3$ Grösse des rechten die Art der Vergrösserung, durch den von $^1/_3$



Grösse des rechten die Art der Abnahme und der Theilung. Ueberdies bezeichneten sie durch die untere Linie *BC*, welche die Basis des Dreieckes bildet, nach Plutarch das passive Princip der Dinge, besonders die Erde oder die Isis; durch die auf ihr senkrechte *AB* das active Princip, Osiris oder Sol, durch die Hypotenuse *AC* endlich, welche beide Linien verbindet, das Zusammengesetzte, Horus, den Sohn beider. Die Seiten des Dreieckes verhalten sich wie $3 : 4 : 5$, und $3+4+5$ macht 12, das Dodekaëder der Natur. Ueberdies macht

die Seite AB mit sich selbst multiplicirt 9, die Seite BC mit sich selbst multiplicirt 16, welche Zahlen zusammengenommen eben so viel ergeben, als die mit sich selbst multiplicirte Seite AC, nämlich 25 — das grösste Geheimniss in der Mathematik, fruchtbar an unendlich vielen Entdeckungen, von den Aegyptern zuerst entdeckt, von Pythagoras unter seinem Namen bekannt gemacht, durch welches sie die Enstehung der Weltkörper mittelst der genetischen Dreiecke anzeigten.

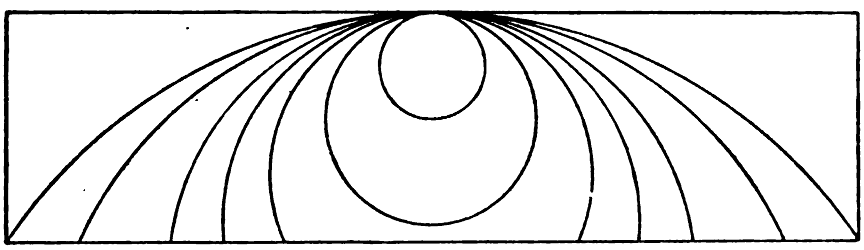
In höchster Verehrung aber unter allen geometrischen Figuren stand bei den Aegyptern und durch sie bei den Pythagoräern der Kreis, das Symbol der Gottheit. Hermes sagt, (nach Athan. Kircheri Zeugniss im *Oedipus Aegyptiacus Tom. sec.*): „Gott ist ein Kreis oder eine intelligible Sphäre, deren Mittelpunkt überall, der Umkreis nirgends ist.“ — Da Gott kein Körper ist, noch sein kann, weil er das höchst Einfache ist, so ist er zum Unterschiede von der körperlichen Sphäre die intelligible Sphäre. Deshalb ist unter dem Mittelpunkte, welcher im Vergleich zum Umfang sehr klein und einfach ist, die göttliche Einfachheit, unter dem im Vergleich zum Mittelpunkte sehr grossen Umfang aber die göttliche Unermesslichkeit zu verstehen. Gott ist also ein Kreis ohne Anfang und Ende, daher ewig; er ist intelligibel, also nicht materiell; das Centrum, d. h. seine untheilbare Wesenheit ist überall ganz; sein Umfang d. h. seine Unermesslichkeit ist nirgends, weil er von einem Orte nicht umfasst werden kann. Man vergleicht Gott auch mit dem Mittelpunkte des Kreises, um den Alles besteht, und von dem Alles nach einer bestimmten Ordnung in den Weltkreis vorschreitet, bis die Gesammtheit der Dinge vollendet ist. Sowie nämlich der Mittelpunkt weder eine Grösse hat, noch der Kreis selbst ist, sondern das Princip aller Kreise: eben so ist Gott nichts von dem, was in der Welt ist, noch die ganze Welt, sondern das Princip der ganzen Welt.

In der Kreisfigur sahen die Aegypter überdies das Universum eingezeichnet. Denn weil der Himmel das Geräumigste, Einfachste und Vollkommenste sein musste, so hat der weiseste Baumeister zu seiner Schöpfung die geräumigste, einfachste und vollkommenste Figur gewählt. Nun ist aber der Kreis von allen Figuren, die denselben Umfang haben, die geräumigste; die vollkommenste, weil er keine Zunahme und keine Abnahme erfährt; die einfachste, weil er nur von Einer Linie eingeschlossen wird. Daher haben auch die Aegypter als eifrige Erforscher göttlicher

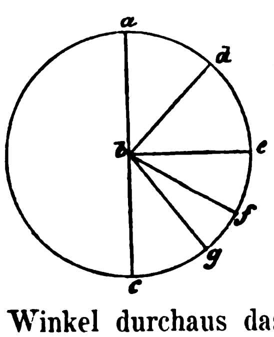
und natürlicher Dinge zuerst alles Erschaffene in der Welt auf die Idee des Kreises zurückgeführt. Denn ob sie die Jahreszeit oder den Umlauf der elementaren Bewegungen, oder die Bahnen des Himmels und der Sterne, oder endlich die Weltseele und das höchste Wesen betrachteten, immer fanden sie dass deren Verrichtungen (*operationes*) in kreisförmigen Bewegungen vor sich gehen. Weil aber das Alles bewegende höchste Wesen nothwendig unbeweglich, unendlich und ewig sein muss, so haben sie durch die Eigenschaften des Kreises angedeutet, wie Alles in Gott und Gott in Allem Eines ist. So singt Pherecides, ein Schüler der Aegypter, in einem Hymnus auf Jupiter von der Gottheit:

Deus enim et circulus est, et quadratum, et triangulum,
Et linea, et centrum, et omnia omnium.

Wie Gott aber zugleich Kreis und Quadrat, Dreieck und Linie, Centrum und Punkt sein, und wie so getrennte und entgegengesetzte Dinge in Gott Eines sein können, suchten sie durch folgende Sätze zu erklären:

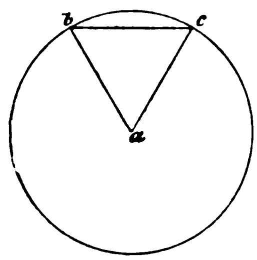


1. Wenn immer grössere und grössere Kreise, von denen die einzelnen eine gerade Linie in demselben Punkte berühren, in's Unendliche gezogen werden, so wird der grösste und letzte der Kreise, über den es keinen grösseren mehr geben kann, nothwendig unendlich und ebenso die gerade Linie unendlich sein.



2. Wenn in einem endlichen Kreise eine am Mittelpunkte befestigte Linie *ab* von irgend einem Punkte der Peripherie zum entgegengesetzten läuft, so wird der Winkel, welcher die genannte Linie mit dem Durchmesser am Centrum beschreibt, *abd, abe, abf, age* unendlich gross werden, wenn die Linie mit dem Durchmesser zusammenfällt; im unendlichen Kreise aber ist Umfang, Halbmesser und Winkel durchaus dasselbe.

3. Im Unendlichen ist die gerade Linie ein Dreieck und das Dreieck ein Kreis. Denn ein jedes endliche Dreieck hat drei Winkel, die gleich sind zwei rechten; da aber zwei rechte einen geraden Winkel, d. h. eine gerade Linie bilden, so ist klar, dass das so betrachtete Dreieck eine reine Linie ist. Dass aber diese Linie und dieses Dreieck zugleich der Kreis ist, erhellt aus Folgen-



dem: Es sei *abc* ein unendliches Dreieck, und die Linie *ab* laufe vom Punkte *b* gegen *c* zum Punkte *b* zurück, so wird dadurch nothwendig ein unendlich grosser Kreis entstehen, von dem *bc* ein Theil ist; und da jener Theil der Bogen eines unendlichen Kreises ist, so muss er nach obigem eine gerade Linie sein so wie *bc*; und da jeder Theil einer unendlichen Circumferenz unendlich ist, so wird er der unendlichen Circumferenz gleich sein. Daraus folgt nothwendig, dass auch das Dreieck *abc* ein unendlich grosser Kreis ist.

So wird es klar, wie Gott, der Schöpfer aller Dinge, aus einem Punkte, den er geschaffen, das ganze Universum hervorgeführt hat, nämlich **durch die Entwicklung des Punktes in den Winkel und endlich in die Circumferenz.**

Die Tetragramme
oder
magischen Quadrate.

Geschichtlicher Rückblick.

Schon in dem grauesten Alterthume findet man unzweifelhafte Spuren davon, dass gewisse merkwürdige Eigenschaften der Quadratzahlen, welche in den sogenannten magischen Quadraten ihren Ausdruck gefunden hatten, in der vorgeschichtlichen Zeit bekannt waren. Doch diese wenigen Ueberreste aus längst vergangenen Jahrtausenden geben das beredtste Zeugniss von dem hohen Grade der Ausbildung, welchen die mathematischen Wissenschaften bereits in jener Epoche erreicht hatten.

Bei den ältesten Culturvölkern finden wir die Ansicht herrschend, dass alle Naturerscheinungen auf mathematischen Gesetzen beruhen und daher auf diese zurückgeführt werden müssen. Man konnte es sich bis jetzt nicht erklären, auf welchem Wege die Indier, Aegypter, Araber und Chaldäer zu ihren so bedeutenden Kenntnissen in der Astronomie, Akustik und Chemie gelangt sind. Man wusste bis jetzt nicht, ob sie die in den genannten Doctrinen aufgestellten Zahlen exacten Beobachtungen entnommen, oder ob sie dieselben ihrer hochentwickelten mathematischen Wissenschaft *a priori* entlehnt und dann erst, als sie in den einzelnen Naturprocessen wiedergefunden wurden, als deren eigentliche Norm erkannt hatten.

Nun sind aber alle diese Zahlen, denen man eine so hohe Wichtigkeit und Bedeutung beilegte, keine anderen, als die Fundamentalzahlen der magischen Quadrate; ja man findet bereits die Behauptung aufgestellt, dass die magischen Quadrate in ihrer eigenthümlichen mathematischen Beschaffenheit den letzten Grund oder das mathematische Gesetz einer jeden Erscheinung in sich enthalten, welches Gesetz daher aus ihnen herausgelesen werden könnte.

Der Ursprung der magischen Quadrate ist wahrscheinlich in Indien zu suchen, denn La Loubère hat ihre Kenntniss in Ostindien, besonders in Surate, sehr verbreitet gefunden. Mit den Zahlzeichen zugleich mögen sie dann von den Indiern zu den Arabern, Chaldäern, Hebräern und Aegyptern, in deren Amuletten und Siegeln sie sich zahlreich vorfinden, gekommen sein. In der Cabbala finden wir eine ganz merkwürdige Anwendung derselben, von der sie auch wahrscheinlich die Benennung der „magischen" erhalten haben.

Ath. Kircherus sagt in seiner Arithmologie pag. 57—59 von ihnen: „Die Philosophen der Araber, Chaldäer und Hebräer kannten bereits die merkwürdige Eigenschaft der Quadratzahlen. Bei den Aegyptern waren gewisse Zahlen heilig, den verschiedenen Gottheiten geweiht und wurden wegen ihrer besonderen, nicht Jedermann zugänglichen Eigenschaften Geheimzahlen genannt. Solcher Zahlen, die den Göttern gewidmet waren, hatten sie sieben und zwar wurden zugeschrieben

dem Saturn die Zahlen	3	9	15	45,
dem Jupiter „ „	4	16	34	136,
dem Mars „ „	5	25	65	325,
der Sonne „ „	6	36	111	666,
der Venus „ „	7	49	175	1225,
dem Merkur „ „	8	64	260	2080,
dem Monde „ „	9	81	360	3321.

Diese Zahlen sind nun die Grundzahlen zur Construction der Tetragramme aus den Wurzeln 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und zwar bezeichnet die erste Zahl immer die Wurzel, die zweite das Quadrat, die dritte die Summe einer Reihe und die vierte die Summe aller im Tetragramme enthaltenen Zahlen.

Em. Moschopolus, der um d. J. 1400 lebte, hat über die magischen Quadrate geschrieben.

Unter den Abendländern erwähnt ihrer Agrippa von Nettesheim (gest. 1535) der erste in seinen Büchern *de occulta philosophia.* Von ihm lernte Bachet de Meziriac sie kennen; dieser suchte die Regel ihrer Zusammensetzung zu entdecken, für welche er eine allgemeine Methode in seinen „Problèmes plaisants" 1613, bekannt machte, wobei er jedoch mit den Quadraten aus gerader Wurzel nicht zu Stande kam.

Nach ihm beschäftigte sich Arnaud mit dieser Aufgabe und gab in den zuerst 1667 zu Paris unter seinem Namen erschienenen „Nouveaux Eléments de Géométrie“ eine Anweisung, magische Quadrate sowohl aus ungeraden, als aus geraden Wurzeln zu bilden.

Frenicle, der durch seine Geschicklichkeit, die verworrensten Fragen der Arithmetik zu beantworten, ausgezeichnet ist, ging viel weiter als Bachet und Arnaud. Er lehrte nicht allein die nach der Methode des ersteren verfertigten magischen Quadrate aus ungerader Wurzel auf mancherlei Art verändern, sondern zeigte auch insbesondere gegen Arnaud, welcher die Zahl der möglichen Veränderungen des Vierer-Tetragramms mit 16 bestimmt hatte, dass solches 880mal verändert werden könne.

Poignard, Canonicus in Brüssel, veröffentlichte im Jahre 1703 eine Schrift über die magischen Quadrate, die er der dabei angebrachten Kunststücke wegen „sublimes“ nannte. Dadurch ward De la Hire veranlasst, zwei ausführliche Abhandlungen über diesen Gegenstand zu verfassen, welche in den Schriften der Pariser Akademie vom Jahre 1705 niedergelegt sind.

Der Jahrgang 1710 dieser Schriften enthält einen Aufsatz von Sauveur, welcher die Vereinfachung der bis dahin bekannten Methoden zur Anfertigung der magischen Quadrate und die Vermehrung derselben mit neuen zum Zwecke hat. Letztere beziehen sich auf die Aufstellung magischer Gitter, Kreuze und Würfel.

Ein neues Verfahren für die Herstellung der magischen Quadrate aus geraden Wurzeln wird in einer in den Mém. vom Jahre 1750 befindlichen Abhandlung von Ons-en-Bray gelehrt. Ferner ist ein mit vieler Klarheit und Präcision von Rallier des Ourmes geschriebener Aufsatz über die Construction der magischen Quadrate überhaupt im vierten Bande der Mém. presentés enthalten.

Auch unter den deutschen Rechenmeistern und Cossisten sind die magischen Quadrate nicht unbekannt geblieben. Stiefel handelt davon in seiner *Arithmetica integra Lib. I. cap. 3.* — Adam Riese lehrt in seinem 1550 in 4 gedruckten Rechenbuche S. 103 sqq. die Verfertigung magischer Quadrate aus ungeraden Wurzeln nach der ersten Regel von Moschopulos und theilt noch die Quadrate zu den Wurzeln 4, 6, 8 mit, ohne jedoch ihre Construction gehörig zu zeigen. — Eine besondere Schrift von Cornelius Capito, welche alle ma-

gischen Quadrate verfertigen lehrt, scheint wenig bekannt geworden zu sein. — Eben so hat Klügel die Construction der magischen Quadrate zum Thema für eine akademische Gelegenheitsschrift genommen, die mir aber nicht zu Gesicht gekommen ist.

Alle angeführten Abhandlungen jedoch bezweckten immer nur die Herstellung der magischen Quadrate aus einer bestimmten Wurzel oder auch die Auffindung jener allgemeinen empirischen Regeln, nach denen man die magischen Quadrate aus jeder beliebigen Wurzel construiren könnte. Da man aber in den magischen Quadraten bis jetzt nichts anderes zu entdecken im Stande war, als eine scharfsinnige Localisation der Ziffern blos zu dem Zwecke, damit jede horizontale, jede verticale und jede der beiden Haupt-Diagonalreihen dieselbe Summe ergeben, so ist es begreiflich, dass man dieses wichtige arithmetisch-geometrische Problem für eine geistreiche mathematische Spielerei erklären, und als unnütz bei Seite legen musste. In diesem Sinne spricht sich auch Klügel in seinem mathematischen Wörterbuche aus, wo er sagt: „Die magischen Quadrate sind ausser dem etwa in der Steganographie möglichen Gebrauche von keinem weiteren Nutzen, als es jedes sinnreiche und schwierige Räthsel ist. — Sie dienen zur Uebung des arithmetischen Geistes, und nur das Vergnügen der Auflösung kann sie interessant machen, je weniger man bei der ersten Betrachtung gleich einsieht, wie man auch bei einer mässigen Menge Zahlen die verlangte Anordnung werde treffen können."

Allein schon der einzige Umstand, dass man aus einer und derselben Wurzel sehr viele Tetragramme construiren kann — aus dem Vierer allein nach Frenicle 880 — die alle der Bedingung der gleichen horizontalen, verticalen und diagonalen Reihen-Summen entsprechen, hätte zu der Betrachtung führen sollen, ob denn diese gleichen Summen wirklich das einzige Resultat waren, welches das Alterthum durch den Aufwand so vielen Scharfsinnes hatte erreichen wollen, ob nicht vielmehr die magischen Quadrate bei weitem Wichtigeres in sich bergen, als jene, wenn auch geistreiche, doch anscheinend zwecklose Vertheilung und Abwägung der Zahlen? — Um diese Frage zur Entscheidung zu bringen, habe ich alle aus dem Alterthume mir vorgelegenen Tetragramme einer genauen Prüfung unterzogen und gefunden, dass sie durchgehends nach einem bestimmten Systeme der Diagonalreihen construirt waren. Da nun die Alten auf diese Art der Construction offenbar einen besondern Werth

gelegt hatten, so gingen meine Bemühungen dahin, alle Tetragramme aus den Wurzeln 3—26 nach demselben Systeme und mit Benützung der bekannten empirischen Regeln herzustellen. Ich ging bis zur Zahl 26, weil mir einige, in den ältesten hebräischen Schriften vorkommende Andeutungen über diese Zahl darauf hinzuweisen schienen, dass in dem Tetragramme aus genannter Wurzel der Schlüssel zum Wesen und zur Construction aller Tetragramme gelegen sein könnte.

Dass diese Vermuthung mich nicht getäuscht, werden die Resultate dieser Arbeit zeigen. Auch will ich den Nachweis zu liefern versuchen, dass die gefundenen mathematischen Gesetze bereits in den ältesten Zeiten bekannt gewesen sind und die erste Grundlage zu dem hohen Wissen der alten Culturvölker gebildet haben.

Die Tetragramme im Allgemeinen.

Alle Quadratzahlen, vom Quadrate der Zahl 3 angefangen, haben die Eigenschaft, dass aus ihnen sogenannte Tetragramme oder Zauberquadrate gebildet werden können. Theilt man nämlich ein beliebiges geometrisches Quadrat in so viele gleiche Quadratfelder ein, als die Quadratzahl Einheiten enthält, so kann man durch ein bestimmtes mathematisches Gesetz die natürliche Zahlenreihe, welche mit der Einheit beginnt und mit der Quadratzahl endet, in die einzelnen Felder so vertheilen, dass die in jeder horizontalen, verticalen und in jeder der beiden Haupt-Diagonalfelderreihen d. i. jener, welche die vier äussersten Eckfelder verbinden, stehenden Zahlen dieselbe Summe ergeben.

Ein jedes auf solche Weise aus einer beliebigen Wurzel w entstandene Tetragramm enthält daher w^2 Felder, von denen auf jede Reihe w Felder kommen; es zeigt stets $(2w + 2)$ mal dieselbe Summe, welche in $\frac{w^3 + w}{2}$ ihren Ausdruck findet, und da diese Summe w mal vorkommt, so ist $\frac{w^4 + w^2}{2}$ die Formel für die Summe aller in einem Tetragramme enthaltenen Zahlen.

Behält man nur dieses Merkmal der Tetragramme im Auge, so lassen sich aus jeder Quadratzahl eine bestimmte und zwar sehr grosse Anzahl von Tetragrammen bilden, welche alle obigen Anforderungen Genüge leisten. Ganz anders aber stellt sich die Sache heraus, wenn man die ältesten, besonders von

den Indiern und Aegyptern auf uns übergegangenen magischen Quadrate in's Auge fasst und ihre innere mathematische Gliederung prüfet. Man wird bei dieser Untersuchung finden, dass ausser den obigen Formbedingungen der magischen Quadrate noch gewisse andere Relationen der einzelnen Tetragramm-Zahlen unter einander bekannt gewesen sein mussten, die meines Wissens bis jetzt weniger berücksichtigt wurden.

Dahin gehört vor Allem das System, nach welchem die beiden Haupt-Diagonalreihen eines Tetragrammes construirt sind. Diese zeigen in allen Tetragrammen arithmetische Reihen erster Ordnung, deren Anfang- und Endglieder, sowie ihre Differenzen nach der Art und Grösse der den Tetragrammen zu Grunde liegenden Wurzeln bestimmt sind.

Bei den aus ungeraden Wurzeln entstandenen magischen Quadraten ergibt der Ausdruck $\frac{w+1}{2}$ die rechte obere Eckzahl als Anfangsglied einer arithmetischen Reihe, welche mit der Differenz w in der Diagonalreihe nach links unten aufsteigt. Die zweite Diagonalreihe enthält stets die natürliche Zahlenreihe, die von dem Centralfelde nach links oben um 1 abnimmt, und nach rechts unten um 1 zunimmt.

In den aus geraden Wurzeln entstandenen Tetragrammen, in welchen statt Eines Centralfeldes die vier mittleren den Centralkern bilden, enthält stets das rechte obere Eckfeld die Einheit als das Anfangsglied der Haupt-Diagonalreihe nach links unten, welche mit der Differenz $w+1$ aufsteigt und mit dem Quadrate der Wurzel endigt; im linken oberen Eckfelde bildet die Wurzelgrösse das erste Glied der Haupt-Diagonalreihe nach rechts unten, welche mit der Differenz $w-1$ aufsteigt und mit dem Werthe $w(w-1)+1$ schliesst.

Die Tetragramme aus ungerader Wurzel haben ferner das Eigenthümliche, dass jeder der vier äusseren Streifen zwei arithmetische Progressionen in sich enthält dergestalt, dass die Glieder der einen in die geraden Felder, die der anderen in die ungeraden Felder zu stehen kommen. In der obersten und untersten Horizontalreihe steigen diese zwei Progressionen von rechts nach links mit der Differenz $w-1$, in dem zu äusserst nach rechts und links gelegenen verticalen Streifen aber von oben nach unten mit der Differenz $w+1$ auf. Die Diagonalreihen, welche mit der Haupt-Diagonale von links oben nach rechts unten parallel liegen, sind ebenfalls zweifacher Natur. Diejenigen von ihnen, in welche ein Feld der anderen Haupt-Diagonalreihe fällt, bilden eine einfache Progression

mit der Differenz $+1$; die übrigen aber, in denen kein solches Feld liegt, werden von der Haupt-Diagonale in zwei Reihen abgetheilt, von denen die eine von links oben nach rechts unten bis zur Haupt-Diagonale um 1 zunimmt, die andere hingegen von rechts unten nach links oben auch bis zur Haupt-Diagonale um 1 abnimmt.

A.

37								5
	38						14	
		39				23		
			40		32			
				41				
			50		42			
		59				43		
	68						44	
77								45

B.

37		29		21		13		5
	38		30		22		14	
47		39		31		23		15
	48		40		32		24	
57		49		41		33		25
	58		50		42		34	
67		59		51		43		35
	68		60		52		44	
77		69		61		53		45

C.

	78		70		62		54	
6		79		71		63		46
	7		80		72		55	
16		8		81		64		56
	17		9		73		65	
26		18		1		74		66
	27		10		2		75	
36		19		11		3		76
	28		20		12		4	

D.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47		39	80	31	72	23		15
16	48		40		32		24	56
57		49		41		33		25
26	58		50		42		34	66
67		59	10	51	2	43		35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Diese soeben beschriebenen Reihen zeigen für das Tetragramm aus der Zahl 9 die Figuren *A*, *B*, *C* und *D*, und zwar *A* die Haupt-Diagonalen, *B* und *C* die zu diesen parallelen und *D* die horizontalen.

Die Zahl des Centralfeldes ferner ist stets der halben Summe der in den Eckfeldern einer Haupt-Diagonale stehenden Zahlen gleich, das rechte untere Eckfeld enthält jedesmal das Product aus der Zahl des rechten oberen Eckfeldes und der Wurzel des Tetragrammes, und die rechte obere Eckzahl, doppelt genommen, ergibt die Zahl des an die Einheit nach links unten anstossenden Diagonalfeldes.

Doch diese Werth- und Relationsbestimmungen der einzelnen Felder eines und desselben Tetragrammes sind es nicht allein, welche das Wesen und die merkwürdigen Eigenschaften der magischen Quadrate charakterisiren und angeben. Die gegenseitigen Beziehungen der Tetragramme unter einander und besonders die mathematischen Verhältnisse, wie sie sich in den gleichliegenden Feldern der in natürlicher Reihe aufeinander folgenden Tetragramme ergeben, sind schon deshalb viel wichtiger, weil sie erst den eigentlichen Schlüssel zu dem Wesen und den mathematischen Gesetzen der Quadratzahlen und der aus ihnen hervorgehenden Tetragramme dargereicht haben. Erst nachdem die magischen Quadrate aus den Wurzeln 3—26 nach demselben Systeme

der beiden Haupt-Diagonalreihen auf dem theilweise bereits dem Alterthume bekannten empirischen Wege aufgestellt worden waren, ergab sich das überraschende Resultat, dass alle gleichliegenden Felder der ganzen Tetragramm-Reihen aus gleichartigen Wurzeln arithmetische Reihen zweiter Ordnung bilden. Die Constatirung dieser Thatsache hatte es erst ermöglicht, die algebraische Formel zu dem Wesen und der Construction der Tetragramme aus gerad-geraden Wurzeln 4, 8, 12 . . . und aus ungerad-geraden Wurzeln, wie 6, 10, 14 aufzustellen, und es musste die Reihe der Tetragramme bis zur Wurzel 26 entwickelt werden, weil sich erst aus dieser Anzahl derselben jene Wiederholung der Glieder dieser Formel ergab, die zu ihrer allgemeingültigen Festsetzung nothwendig war.

Aus den unzähligen Wechselbeziehungen der Zahlen der verschiedenen Tetragramme verdienen besonders folgende angeführt zu werden:

In allen Tetragrammen aus ungerader Wurzel (*Taf. XLVI. Nro. 68*) enthält das Feld, welches über dem linken unteren Eckfelde liegt, immer die Leitzahl des Tetragrammes — den Binomialfactor $\frac{w(w-1)}{2}$, das x der algebraischen Tafel. Substituirt man hier dem w die Werthe 3, 5, 7, 9, 11, 13 . . . so erhält man die Zahlen 3, 10, 21, 36, 55, 78 . . . eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Differenz 4. — In den Tetragrammen aus geraden Wurzeln befindet sich die Leitzahl im rechten oberen Felde des vierfächerigen Centralkernes, und werden hier dem w die Werthe 4, 6, 8, 10, 12, 14 . . . substituirt, so resultirt wieder die Reihe zweiter Ordnung 6, 15, 28, 45, 66, 91 ebenfalls mit der Differenz 4. Ordnet man die Glieder beider Reihen nach der natürlichen Aufeinanderfolge der Wurzeln 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 . . . so erhält man die Zahlenreihe 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91 . . . eine arithmetische Progression zweiter Ordnung mit der Differenz 1.

In den Tetragrammen aus ungerader Wurzel ist die im Centralfelde stehende Zahl die eigentliche Mittelzahl des Quadrates. Ihr Werth $\frac{w^2+1}{2}$ ergibt für $w = 3, 5, 7, 9$ . . . die Reihe 5, 13, 25, 41, 61, 85, . . . ebenfalls zweiter Ordnung mit der Differenz 4.

In allen Tetragrammen ist die **Summe einer Reihe** gegeben durch $\frac{w^3+w}{2}$, welcher Werth für die Reihe der Wurzeln eine arithmetische Progression dritter Ordnung ergibt.

Die **Summe aller Zahlen** der einzelnen Tetragramme $= \frac{w^4+w^2}{2}$ bildet endlich Reihen vierter Ordnung.

Diese und andere Beziehungen zwischen den Zahlen der Tetragramme sind aus dem beigefügten arithmetischen Schlüssel (*Tafel XLVI. 68. 69.*) ersichtlich.

Soll nun ein Tetragramm aus irgend einer Wurzel construirt werden, welches **alle** angeführten **wesentlichen** Merkmale an sich trägt, so wird man einsehen, dass für ein **jedes** einzelne Feld eines so beschaffenen Tetragrammes nur Eine Zahl der ganzen einzutragenden Zahlenreihe passen kann, dass dabei jede willkürliche Abänderung von vorneherein ausgeschlossen ist. Zur Construction solcher Tetragramme sind aber auch ganz andere Regeln nöthig als die bis jetzt benützten, da das Tetragramm von nun an auch ganz anderen Anforderungen zu genügen hat.

Mit dem Wesen der Quadratzahlen ist ihr Verhalten zu der **geometrischen Construction**, mit welcher sie die magischen Quadrate bilden, unzertrennlich verbunden. Denn die geometrische Form wirkt vermöge ihrer eigenthümlichen Beschaffenheit auf die gesetzmässige Vertheilung der Ziffern entscheidend ein.

Die aus **ungeraden Seitenzahlen** entstandenen Quadrate haben das Eigene, dass sich hier um Ein Feld, welches die Mitte des Quadrates einnimmt, alle übrigen Felder in vollkommenster Symmetrie gruppiren und gleichsam radienartig gegen dasselbe zulaufen, so dass jedes Feld ein vom Mittelfelde des Quadrates gleich weit entferntes Gegenfeld besitzt.

Die aus **geraden Seitenzahlen** entstandenen Quadrate haben aber kein solches Centralfeld, sondern hier bilden vier Felder die Mitte des Quadrates, seinen eigentlichen Kern, um den sich die übrigen Felder gruppiren, natürlich nicht so gleichförmig, wie im früheren Falle. Doch auch die geometrischen Quadrate aus geraden Seitenzahlen sind untereinander verschieden, je nachdem sie aus einer gerad-geraden oder aus einer ungerad-geraden Zahl gebildet wurden. Erstere zeigen nämlich in ihrer oberen und unteren Hälfte

paarige Felderreihen, während dieses bei den Quadraten, deren Seitenzahlen ungerad-gerad sind, nicht der Fall ist.

Da es nun bei der gesetzmässigen Vertheilung der Glieder eines Tetragrammes vor Allem darauf ankommt, dass zwei Zahlen, welche stets dieselbe Summe ergeben, so im Quadrate localisirt werden, dass sie entweder vom Centralfelde oder von der vierfächerigen Mitte gleich weit entfernt sind, so ist es begreiflich, dass dort, wo dies wegen der Construction des Quadrates auf eine und dieselbe Weise nicht möglich ist, mit einzelnen Gliedern gewisse Versetzungen vorgenommen werden müssen, die dann die Form der Tetragramme bedeutend abändern und deshalb andere Gesetze zu ihrer Herstellung erheischen. Auf diese Weise sind für die drei Gruppen der Tetragramme auch drei Tafeln algebraischer Formeln aufgestellt worden, mittelst welcher aus jeder beliebigen Zahl — w — ein Tetragramm gebildet werden kann, das alle Bedingungen erfüllt.

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme.

Nachdem auf dem rein empirischen Wege der arithmetische Schlüssel (*Tafel XLVI 68, 69*) zur Construction der Tetragramme aufgefunden worden war, und nachdem dieser Schlüssel das Princip der Construction in den arithmetischen Reihen erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung aufgedeckt hatte, kam es nur mehr darauf an, das gefundene Gesetz in die eigentliche mathematische Form zu kleiden, was keiner weiteren Schwierigkeit mehr unterlag. Man ging dabei von folgenden einfachen Sätzen aus:

Ist u_n das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe von der r^{ten} Ordnung, so lässt sich dieses allgemeine Glied darstellen als eine Function des Stellenzeigers und der $(r + 1)$ ersten Glieder der Reihe:

$$u_n = A_{r+1}\, u_{r+1} + A_r\, u_r + A_{r-1}\, u_{r-1} + \dots + A_2\, u_2 + A_1\, u_1$$

und jeder der Coëfficienten A_1, A_2 etc. ist hierbei eine ganze Function von n der r^{ten} Ordnung.

So ist für eine arithmetische Reihe I. Ordnung

$$u_n = (n-1)\, u_2 - (n-2)\, u_1 \tag{1}$$

für eine arithmetische Reihe II. Ordnung

$$u_n = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} u_3 - (n-1)(n-3)\, u_2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} u_1 \tag{2}$$

für eine arithmetische Reihe III. Ordnung

$$u_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} u_4 - \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{1.2} u_3 + \frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{1.2} u_2 - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} u_1 \tag{3}$$

für eine arithmetische Reihe IV. Ordnung

$$u_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4} u_5 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{1.2.3} u_4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{4} u_3 - \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} u_2 + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4} u_1 \tag{4}$$

Für den vorliegenden Zweck genügen diese Formeln. Statt des Stellenzeigers n ist nun die Wurzelgrösse des Tetragrammes w einzuführen, um das allgemeine Glied einer der gedachten Zahlenreihen zu erhalten. Den Stellenzeigern

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots\ldots n$$

entsprechen daher für die ungeraden Wurzelgrössen

$$w = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots\ldots (2n+1) \tag{a}$$

für die gerad-geraden Wurzelgrössen

$$w = 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20 \ldots\ldots 4n \tag{b}$$

für die ungerad-geraden Wurzelgrössen

$$w = 6, 10, 14, 18, 22 \ldots\ldots (4n+2) \tag{c}$$

Also ist für die *a*) Quadrate:

$$n = \frac{w-1}{2} \tag{5}$$

für die *b*) Quadrate

$$n = \frac{w}{4} \tag{6}$$

und für die *c*) Quadrate

$$n = \frac{w-2}{4} \tag{7}$$

Die Substitution (5) in den Gleichungen 1), 2), 3), 4) ergibt folgende für *a*) Quadrate mit ungeraden Wurzeln geltende Resultate:

für arithmetische Progressionen I. Ordnung

$$u = \frac{1}{2}(w-3)\,u_2 - \frac{1}{2}(w-5)\,u_1 \tag{8}$$

für arithmetische Progressionen II. Ordnung

$$u = \frac{1}{8}(w-3)(w-5)\,u_3 - \frac{1}{4}(w-3)(w-7)\,u_2 + \frac{1}{8}(w-5)(w-7)\,u_1 \tag{9}$$

für arithmetische Reihen III. Ordnung

$$u = \frac{1}{48}(w-3)(w-5)(w-7)\,u_4 - \frac{1}{16}(w-3)(w-5)(w-9)\,u_3 + \\ + \frac{1}{16}(w-3)(w-7)(w-9)\,u_2 - \frac{1}{48}(w-5)(w-7)(w-9)\,u_1 \ldots. \tag{10}$$

für arithmetische Reihen IV. Ordnung

$$u = \frac{1}{384}(w-3)(w-5)(w-7)(w-9)\,u_5 - \frac{1}{192}(w-3)(w-5)(w-7)(w-11)\,u_4 + \\ + \frac{1}{64}(w-3)(w-5)(w-9)(w-11)\,u_3 - \frac{1}{192}(w-3)(w-7)(w-9)(w-11)\,u_2 + \\ + \frac{1}{384}(w-5)(w-7)(w-9)(w-11)\,u_1 \ldots.. \tag{11}$$

Eben so ergibt die Substitution (6) in die Gleichungen 1) 2) 3) 4) folgende Resultate für die *b*) Quadrate mit gerad-geraden Wurzeln:

für die arithmetischen Reihen I. Ordnung

$$u = \left(\frac{w}{4}-1\right)u_2 - \left(\frac{w}{4}-2\right)u_1 \tag{12}$$

für arithmetische Reihen II. Ordnung

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-2\right)u_3 - \left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)u_2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)u_1 \tag{13}$$

für arithmetische Reihen III. Ordnung

$$u = \frac{1}{6}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)u_4 - \frac{1}{2}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-2\right)\times \\ \times\left(\frac{w}{4}-4\right)u_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)\left(\frac{w}{4}-4\right)u_2 - \frac{1}{6}\left(\frac{w}{4}-2\right)\times \\ \times\left(\frac{w}{4}-3\right)\left(\frac{w}{4}-4\right)u_1 \tag{14}$$

für arithmetische Reihen IV Ordnung

$$u = \frac{1}{12}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)\left(\frac{w}{4}-4\right)u_5 - \frac{1}{6}\left(\frac{w}{4}-1\right)\times \tag{15}$$
$$\times\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)\left(\frac{w}{4}-5\right)u_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-4\right)\times$$
$$\times\left(\frac{w}{4}-5\right)u_3 - \frac{1}{6}\left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)\left(\frac{w}{4}-4\right)\left(\frac{w}{4}-5\right)u_2 +$$
$$+\frac{1}{12}\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)\left(\frac{w}{4}-4\right)\left(\frac{w}{4}-5\right)u_1$$

Endlich gibt die Substitution (7) folgende Resultate für *c*) Quadrate mit ungerad-geraden Wurzeln:

für arithmetische Reihen I. Ordnung

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{2}-3\right)u_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{w}{2}-5\right)u_1 \tag{16}$$

für Reihen II. Ordnung

$$u = \frac{1}{8}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-5\right)u_3 - \frac{1}{4}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)u_2 + \tag{17}$$
$$+\frac{1}{8}\left(\frac{w}{2}-5\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)u_1$$

für Reihen III. Ordnung

$$u = \frac{1}{48}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-5\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)u_4 - \frac{1}{16}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-5\right)\times \tag{18}$$
$$\times\left(\frac{w}{2}-9\right)u_3 + \frac{1}{16}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)\left(\frac{w}{2}-9\right)u_2 - \frac{1}{48}\left(\frac{w}{2}-5\right)\times$$
$$\times\left(\frac{w}{2}-7\right)\left(\frac{w}{2}-9\right)u_1$$

für Reihen IV Ordnung

$$u = \frac{1}{384}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-5\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)\left(\frac{w}{2}-9\right)u_5 - \frac{1}{192}\left(\frac{w}{2}-3\right)\times \tag{19}$$
$$\times\left(\frac{w}{2}-5\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)\left(\frac{w}{2}-11\right)u_4 + \frac{1}{64}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-5\right)\left(\frac{w}{2}-9\right)\times$$
$$\times\left(\frac{w}{2}-11\right)u_3 - \frac{1}{192}\left(\frac{w}{2}-3\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)\left(\frac{w}{2}-9\right)\left(\frac{w}{2}-11\right)u_2 +$$
$$+\frac{1}{384}\left(\frac{w}{2}-5\right)\left(\frac{w}{2}-7\right)\left(\frac{w}{2}-9\right)\left(\frac{w}{2}-11\right)u_1$$

Mit Hülfe dieser Formeln ergeben sich schliesslich folgende Resultate, welche in den algebraischen Tafeln enthalten sind.

I. Gesetz für die Tetragramme

aus den ungeraden Wurzelgrössen.

Die gleiche Summe $S = \frac{w^3 + w}{2}$

Die Totalsumme aller Zahlen eines Tetragrammes $\Sigma = \frac{w^4 + w^2}{2}$

Die Zahl im Mittelpunkte des Tetragrammes $= \frac{w^2 + 1}{2}$

Die linke obere Eckzahl $= \frac{w^2 - w + 2}{2}$

Die rechte obere Eckzahl $= \frac{w + 1}{2}$

Die linke untere Eckzahl $= \frac{2w^2 - w + 1}{2}$

Die rechte untere Eckzahl $= \frac{w^2 + w}{2}$

Die Differenz der in den Horizontal- und Vertical-Reihen vorkommenden Progressionen $= w + 1$

Die Differenz der Diagonalreihe von links oben nach rechts unten $= 1$
Die Differenz der Diagonalreihe von rechts oben nach links unten $= w$

Betrachten wir ferner die Diagonalreihe, welche die Einheit und die Wurzel enthält, so können wir aus dieser Reihe eine hypergeometrische Reihe ableiten, da das Tetragramm aus der Zahl 3 das erste Glied dieser Reihe gibt; ferner liefert das Tetragramm aus der Zahl 5 das zweite Glied 1×2, das aus der Zahl 7 das dritte Glied $1 . 2 . 3$, das Tetragramm aus der Zahl n das $\frac{n-1}{2}$ te Glied $1 . 2 . 3 . 4 \ldots . \times \frac{n-1}{2}$, wenn man nämlich die Glieder, welche in dieser Reihe stehen und von 1 aufsteigen, mit einander multiplicirt. So wie aus dieser Diagonale, eben so können aus den meisten Diagonalen hypergeometrische Reihen gebildet werden. Ferner kann man aus ihnen auch die Binomial-Factoren ableiten. Betrachten wir dieselbe Diagonale in ihrer algebraischen Form, w, $w - 1$, $w - 2$, $w - 3$, $w - 4$, $w - 5$, etc. nach der einen Seite, 1, 2, 3, 4, 5 etc. nach der

anderen Seite, und ziehen 2, 4, 6, 8, 10 solche Glieder zusammen, und zwar die ersteren als Factoren zum Zähler, die zweiten zum Nenner, so erhalten wir $\frac{w}{1}$, $\frac{w(w-1)}{1.2}$, $\frac{w(w-1)(w-2)}{1.2.3}$ etc. und dies sind Binomial-Factoren.

Wie früher erwähnt, finden sich in der obersten und untersten Horizontalreihe und in den zwei äussersten Vertical-Reihen zwei Progressionen, von denen die eine, mit $\frac{w+1}{2}$ beginnend, von rechts nach links mit $w-1$ in horizontaler und mit $w+1$ in verticaler Richtung zunimmt, somit folgende Reihe ergibt:

$$\begin{array}{llll}
\ldots\ \frac{7w-5}{2}, & \frac{5w-3}{2}, & \frac{3w-1}{2}, & \frac{w+1}{2} \\
\ldots\ \frac{9w-3}{2}, & \frac{7w-1}{2}, & \frac{5w+1}{2}, & \frac{3w+3}{2} \\
\ldots\ \frac{11w-1}{2}, & \frac{9w+1}{2}, & \frac{7w+3}{2}, & \frac{5w+5}{2} \\
\ldots\ \frac{13w+1}{2}, & \frac{11w+3}{2}, & \frac{9w+5}{2}, & \frac{7w+7}{2}
\end{array}$$

diese Reihe nimmt die ungeraden Felder ein.

Ferner hat man jene Reihen, die durch die Haupt-Diagonalen gehen und natürlich aufsteigen, wie:

$$a, \quad a+1, \quad a+2, \quad a+3 \quad \text{etc.},$$

dann jene Reihen, welche mit der Wurzel aufsteigen, wie

$$a, \quad a+w, \quad a+2w, \quad a+3w \ldots.$$

welch' letztere Reihen parallel zur Haupt-Diagonale von rechts oben nach links unten verlaufen und ihren Anfang in der früher erwähnten Horizontalreihe haben. Sie verlaufen wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
\frac{5w-3}{2}, & \frac{3w-1}{2}, & \frac{w+1}{2} \\
\frac{7w-3}{2}, & \frac{5w-1}{2}, & \frac{3w+1}{2} \\
\frac{9w-3}{2}, & \frac{7w-1}{2}, & \frac{5w+1}{2} \\
\frac{11w-3}{2}, & \frac{9w-1}{2}, & \frac{7w+1}{2}
\end{array}$$

Alle diese Reihen sind durch die Bestimmtheit der Wurzeln begränzt und durch deren unendliche Anzahl unendlich der Zahl nach. Sie bieten durch

die Mannigfaltigkeit der Ausdrücke unendlich viele allgemeine Glieder zur Construirung von Reihen, welche in den Tetragrammen schon gebildet stehen.

Diese wichtigen Eigenschaften zeigt die Tafel *XLVII, 70.*

II. Gesetz für die Tetragramme

aus den gerad-geraden Wurzelgrössen.

Bei den ungeraden Wurzeln bilden die vier Eckzahlen die Säulen, auf welchen das Tetragramm ruht, und die zwei Diagonalreihen ergeben die Hauptmauern für das ganze Gebäude. Das Tetragramm aus ungerader Wurzel entsteht daher an seinen äussersten Linien und entwickelt sich centripetal gegen seinen Mittelpunkt. Die Bildung der Tetragramme aus gerader Wurzel aber schlägt den entgegengesetzten Weg ein. Hier bilden die vier in der Mitte stehenden Zahlen jenen Kern, aus welchem centrifugal alle übrigen Grössen auslaufen und daher nirgends eine Gränze finden können, weil diese Ausstrahlung in der Unendlichkeit der Zahlen ihre eigene Unendlichkeit findet.

Die Analyse dieser centrifugalen Fortentwicklung ergab nun die Bestättigung, dass hier ebenfalls das Gesetz der arithmetischen Reihen gelte, dass ein jedes gleichnamige Feld in den aufeinander folgenden Tetragrammen der gerad-geraden Wurzelgrössen die aufeinander folgenden Glieder einer und derselben Reihe enthalte, dass also der Bildung dieser Tetragramme dasselbe Princip zu Grunde liege.

Die Berechnung nach den Fundamental-Sätzen der Tetragramme brachte in dieser Beziehung folgende Resultate:

Die Summe einer Reihe $= \frac{w^3 + w}{2}$

Die Summe aller Zahlen im Tetragramm $= \frac{w^4 + w^2}{2}$

Das rechte obere Eckfeld $= 1$

Das linke obere Eckfeld $= w$.

Diese beiden Ausdrücke steigen mit der Differenz $w + 1$ auf, so dass die Diagonale von rechts oben nach links unten

$$1,\ w + 2,\ 2w + 3,\ 3w + 4,\ \ldots\ w(w - 1) - 1,\ w^2$$

und die von links oben nach rechts unten

$$w,\ 2w-1,\ 3w-2,\ 4w-3\ \ldots\ w(w-2)+2,\ w(w-1)+1$$

ergibt, woraus die vier resultirenden Mittelfelder

$$\frac{w}{2}(w-1)+1,\ \frac{w}{2}(w-1),\ \frac{w}{2}(w+1)+1,\ \frac{w}{2}(w+1)$$

sind.

Wenn man mit $\frac{w}{2}(w-1)$ jenes Glied bezeichnet, von dem die Bildung des Tetragrammes ausgeht und dasselbe x nennt, so ergibt die Diagonale von rechts oben nach links unten:

$$x-\left(\frac{w-2}{2}\right)(w+1),\quad x-\left(\frac{w-4}{2}\right)(w+1),\quad \ldots\ x-11(w+1),\quad x-10(w+1),$$

$$x-9(w+1),\quad \ldots\ x\quad x+w+1,\quad x+2(w+1),\quad x+3(w+1),\quad \ldots\ x+\frac{w}{2}(w+1);$$

die von links oben nach rechts unten:

$$x-\left(\frac{w-2}{2}\right)w+\frac{w}{2},\quad x-\left(\frac{w-4}{2}\right)w+\left(\frac{w-2}{2}\right),\quad \ldots\ldots\quad x-11w+12,$$

$$x-10w+11\ldots x-w+2,\quad x+1,\ x+w,\quad x+2w-1\ldots,\quad x+\frac{w}{2}w-\left(\frac{w-2}{2}\right)$$

Aehnliche Reihen wie die Diagonalen mit der Differenz $w \pm 1$ enthält das ganze Tetragramm aus jeder gerad-geraden Zahl. Z. B. die unter der von rechts oben nach links unten verlaufenden Diagonale liegende Reihe A:

$$x-10w+12,\quad x-9w+11,\quad x-8w+10\ \ldots$$

die darunter befindliche B:

$$x+10w-11,\quad x+9w-10,\quad x+8w-9\ \ldots$$

So bietet jedes Feld, welches in der äussersten horizontalen oder verticalen liegt, eine solche Reihe. Da wir früher zwei Beispiele von der äussersten verticalen hatten, wollen wir jetzt einige von der äussersten horizontalen betrachten. Z. B. das Feld neben dem linken unteren Eckfelde, die Reihe C:

$$x-\left(\frac{w-2}{2}\right)w-\left(\frac{w-4}{2}\right);\quad x-\left(\frac{w-4}{2}\right)w-\left(\frac{w-6}{2}\right);\quad x-\left(\frac{w-6}{2}\right)w-$$
$$-\left(\frac{w-8}{2}\right);\quad \ldots$$

$$x-11w-10;\quad x-10w-9;\quad x-8w-7;\quad x-7w-6;\ \ldots$$

das Feld neben dem rechten untern Eckfelde:

$$x - \left(\frac{w-2}{2}\right)(w-1); \quad x - \left(\frac{w-4}{2}\right)(w-1); \quad x - \left(\frac{w-6}{2}\right)(w-1); \quad \ldots$$

$$x - 11\,(w-1); \quad x - 10\,(w-1); \quad x - 9\,(w-1); \quad x - 8\,(w-1); \quad \ldots.$$

Wenn wir diese Reihen auf die Formel der Wurzel zurückführen, so ist die *A*:

$$\frac{w^2-(w-3)\,w}{2} + \frac{w}{2}; \quad \frac{w^2-(w-5)\,w}{2} + \left(\frac{w-2}{2}\right); \quad \frac{w^2-(w-7)\,w}{2} + \left(\frac{w-4}{2}\right);$$

$$\frac{w^2-(w-9)\,w}{2} + \left(\frac{w-6}{2}\right); \quad \ldots \frac{w}{2}(w-13)+8; \quad \frac{w}{2}(w-11)+7; \ldots$$

die *B*:

$$\frac{w^2+(w-5)\,w}{2} - \left(\frac{w-2}{2}\right); \quad \frac{w^2+(w-7)\,w}{2} - \left(\frac{w-4}{2}\right); \quad \frac{w^2+(w-9)\,w}{2} -$$

$$- \left(\frac{w-6}{2}\right); \quad \ldots. \frac{w}{2}(w+11)-7; \quad \frac{w}{2}(w+9)-6; \quad \frac{w}{2}(w+7)-5; \quad \ldots.$$

die *C*:

$$\frac{w^2-(w-1)\,w}{2} - \left(\frac{w-4}{2}\right); \quad \frac{w^2-(w-3)\,w}{2} - \left(\frac{w-6}{2}\right); \quad \frac{w^2-(w-5)\,w}{2} -$$

$$- \left(\frac{w-8}{2}\right); \quad \ldots. \frac{w}{2}(w-15)-6; \quad \frac{w}{2}(w-13)-5; \quad \frac{w}{2}(w-11)-4; \quad \ldots$$

Ausser diesen Reihen kommen noch in den auf die Diagonalen senkrechten Feldern Reihen vor, z. B.:

$$\frac{w}{2}(w-1)-7; \quad \frac{w}{2}(w-3)-6; \quad \frac{w}{2}(w-5)-5; \quad \frac{w}{2}(w-7)-4;$$

sowie auch jeder Ausdruck des Gesetzes der Ausdruck einer Reihe ist, wenn wir für w aufeinanderfolgende Werthe einsetzen.

Genaue Einsicht in die Zahl und das Wesen aller möglichen in den Tetragrammen enthaltenen Reihen geben die allgemeinen Formeln, weshalb wir auf *Tafel XLVIII*, *XLIX*, *71*, *72*, verweisen. Diese Formelketten zeigen in dem Tetragramme aus der Wurzel 24 bereits alle jene Wiederholungen, die zur Herstellung aller nur denkbaren Tetragramme aus den gerad-geraden Wurzelgrössen nöthig sind, um sie auf streng mathematischem Wege mit Ausschluss jeder Unbestimmtheit und Willkür darzustellen.

III. Gesetz der Tetragramme

aus den ungerad-geraden Wurzelgrössen.

Die Herstellung der Tetragramme aus ungerad-geraden Wurzeln ist am complicirtesten. Die Bildung derselben geht in Dreiecken vor sich, die durch die Diagonalen und die verschiedene Lage und Grösse der Ziffern gekennzeichnet sind. — (*Tab. L, LI Nr. 73, 74.*)

Auch hier bemerken wir das Princip der arithmetischen Reihen, unter welchen die Diagonalreihen, die in den Tafeln durch die Schrift markirt sind, die wichtigste Rolle spielen.

A) die von rechts oben nach links unten

$$1,\quad w+2,\quad 2w+3,\quad 3w+4,\quad 4w+5,\quad \ldots\ldots\quad w^2$$

B) die von links oben nach rechts unten in umgekehrter Reihenfolge:

$$w^2-w+1,\quad w^2-2w+2,\quad \ldots\ 4w-3,\quad 3w-2,\quad 2w-1,\quad w.$$

Diese in den Diagonalen stehenden Zahlen, von denen die unter *A* mit der Differenz $w+1$, die unter *B* mit $w-1$ aufsteigen, ergeben je zwei in einer Verticalreihe summirt, folgende Ausdrücke als Summen.

Zur linken Seite:

$$w^2-w+2,\quad w^2-w+4,\quad w^2-w+6,\quad w^2-w+8\ldots\ldots$$

wobei die Differenz $+2$ ist.

Auf der entgegengesetzten Seite sind die Summen:

$$w^2+w,\quad w^2+w-2,\quad w^2+w-4,\quad w^2+w-6,\quad \ldots\ldots$$

mit der Differenz -2.

Führt man diese Formen auf x zurück, so hat man

$$A)\quad x-\left(\frac{w-2}{2}\right)(w+1),\quad x-\left(\frac{w-4}{2}\right)(w+1),\quad x-\left(\frac{w-6}{2}\right)(w+1),\ldots\ldots$$

$$\ldots\ x-w-1,\quad x,\quad x+w+1,\quad x+(w+1)2,\quad x+(w+1)3\ldots\ldots,\quad x+\frac{w}{2}(w+1).$$

$$B)\quad x-\left(\frac{w-2}{2}\right)w+\frac{w}{2},\quad x-\left(\frac{w-4}{2}\right)w+\left(\frac{w-2}{2}\right),\quad x-\left(\frac{w-6}{2}\right)w+$$
$$+\left(\frac{w-4}{2}\right),\ \ldots$$

$$\ldots\ x-w+2,\ x+1,\ x+w,\ x+2w-1,\ x+3w-2,\ \ldots,\ x+\frac{w^2}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right).$$

Die sich ergebenden Summen je zweier in einer Verticalreihe stehenden Glieder:

$$2x+2,\quad 2x+4,\quad 2x+6,\quad 2x+8,\quad \ldots,\quad 2x+w$$

auf der entgegengesetzten Seite:

$$2x+2w,\quad 2x+2w-2,\quad 2x+2w-4,\quad 2x+2w-6,\quad \ldots,\quad 2x+w+2.$$

Von der Summe w^2+1, welche zwei Diagonalzahlen stets ergeben, die in derselben Diagonalreihe stehen und gleichweit von den Enden entfernt sind, unterscheiden sich die früheren Summen je zweier in einer Verticalreihe stehenden Diagonalzahlen dadurch, dass die einen links um 1, 3, 5, 7, 9 . . . grösser, die rechts um eben so viel kleiner sind.

An diese Diagonalreihen schliesst sich nun nach aussen hin eine zu ihr parallele, welche den eben erwähnten Unterschied ausgleicht, und zwar

links oben:

$$w+1,\quad 2w+2,\quad 3w+3,\quad 4w+4,\quad \ldots \frac{w^2}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$$

oder

$$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right),\quad \frac{w^2-(w-5)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right),\quad \frac{w^2-(w-7)w}{2}-$$
$$-\left(\frac{w-6}{2}\right),\ \ldots$$

links unten:

$$w^2-(2w-1),\quad w^2-(3w-2),\quad w^2-(4w-3),\quad w^2-(5w-4),\ \ldots$$

oder

$$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right),\quad \frac{w^2+(w-5)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right),\quad \frac{w^2+(w-7)w}{2}-$$
$$-\left(\frac{w-6}{2}\right),\ \ldots\ldots$$

Auf der andern Seite, also zur rechten, gehen die Reihen so, dass immer abwechselnd ein Glied der oberen Reihe ein unteres Feld einnimmt und ein Glied der unteren Reihe das Feld der oberen Reihe ausfüllt. Es ergibt sich demnach für diese Reihen:

C) Oben rechts:

$$\frac{w^2 + (w-3)w}{2} + \frac{w}{2},\quad \frac{w^2-(w-5)w}{2} + \left(\frac{w-2}{2}\right),\quad \frac{w^2+(w-7)w}{2} + \left(\frac{w-4}{2}\right),$$

$$\frac{w^2-(w-9)w}{2} + \left(\frac{w-6}{2}\right)\ \ldots\ldots$$

D) Unten rechts:

$$\frac{w^2 - (w-3)w}{2} + \frac{w}{2},\quad \frac{w^2+(w-5)w}{2} + \left(\frac{w-2}{2}\right),\quad \frac{w^2-(w-7)w}{2} + \left(\frac{w-4}{2}\right),$$

$$\frac{w^2+(w-9)w}{2} + \left(\frac{w-6}{2}\right)\ \ldots\ldots$$

Nachdem man auf diese Weise die beiden Haupt-Diagonalen ausgeglichen, bilde man die beiden mittleren Horizontalreihen, indem man von den Zahlen ausgeht, die man durch die den Haupt-Diagonalen anliegenden Diagonalzahlen gebildet hat.

Ist x das rechte obere Glied der vier mittleren Glieder, so geht die obere Reihe so nach beiden Seiten:

Von x nach rechts:

$$x+1,\ x,\ x+w+2,\ x+w-2,\ x+4,\ x+w-4\ \ldots\ldots$$

Von x nach links:

$$x+w+5,\ x-3,\ x+w+3,\ x-1,\ x+1,\ x.$$

In der unteren verhält es sich ähnlich. Die beiden mittelsten Glieder sind:

$$x+w+1,\ x+w,$$

von denen wie bei der oberen die Reihe ausgeht. Von diesen Zahlen der beiden mittleren horizontalen steigt man in den zur Haupt-Diagonale parallelen Feldern mit der $\pm$ Differenz von $w+1$ auf.

In der obersten und untersten Horizontalreihe gehen von jeder Ecke bis zur Mitte zwei Progressionen, die eine von rechts nach links, die andere umgekehrt und zwar:

(a) $1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\ldots,$ (b) $w^2-1,\ w^2-3,\ w^2-5,\ \ldots$

(a') $w,\ w-2,\ w-4,\ w-6,\ .$ (b') $w^2-(w-2),\ w^2-(w-4),\ w^2-(w-6),\ldots$

und in der untersten:

(a) $2, 4, 6, 8 \ldots,$ (b) $w^2-2,\ w^2-4,\ w^2-6, \ldots$

(a') $w-1,\ w-3,\ w-5, \ldots$ (b') $w^2-(w-3),\ w^2-(w-5),\ w^2-(w-7); \ldots$

Oder wie sie in den Tafeln eingetragen sind:

$$(a)\quad \frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right),\ \frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-6}{2}\right),\ \frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-10}{2}\right),\ \frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-14}{2}\right), \ldots$$

$$(b)\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right),\ \frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-6}{2}\right),\ \frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-10}{2}\right),\ \frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-14}{2}\right), \ldots$$

$$(a')\quad \frac{w^2-(w-1)w}{2}+\frac{w}{2},\ \frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-4}{2}\right),\ \frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-8}{2}\right),\ \frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-12}{2}\right), \ldots$$

$$(b')\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right),\ \frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-8}{2}\right),\ \frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-12}{2}\right), \ldots$$

Nach x würden die Formeln so lauten:

$$(a)\quad x-\frac{(w-2)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right),\ x-\frac{(w-2)w}{2}-\left(\frac{w-6}{2}\right),\ x-\frac{(w-2)w}{2}-\left(\frac{w-10}{2}\right),\ x-\frac{(w-2)w}{2}-\left(\frac{w-14}{2}\right), \ldots$$

$$(b)\quad x+\frac{w^2}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right),\ x+\frac{w^2}{2}+\left(\frac{w-6}{2}\right),\ x+\frac{w^2}{2}+\left(\frac{w-10}{2}\right), \ldots$$

$$(a')\quad x-\frac{(w-2)w}{2}+\frac{w}{2},\ x-\frac{(w-2)w}{2}+\left(\frac{w-4}{2}\right),\ x-\frac{(w-2)w}{2}+\left(\frac{w-8}{2}\right) \ldots$$

$$(b')\quad x+\frac{w^2}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right),\ x+\frac{w^2}{2}-\left(\frac{w-8}{2}\right),\ x+\frac{w^2}{2}-\left(\frac{w-12}{2}\right), \ldots$$

Von den einzelnen Gliedern gehen nun arithmetische Reihen parallel zu den Haupt-Diagonalen gegen die beiden mittelsten Verticalreihen zu und zwar

mit der Differenz von w+1. Die beiden mittelsten Verticalreihen erhalten durch die früher erwähnten Reihen C und D nothwendig ein complicirteres Aussehen, da durch jene Versetzungen allein die algebraische Form ermöglicht wird. — Diese Felder der Mittelreihe nehmen erst vom dritten Gliede eine regelmässige Aufsteigung an und zwar auf der einen Reihe:

$$\frac{w^2+7w}{2}+1,\quad \frac{w^2+9w}{2},\quad \frac{w^2+11w}{2}+1,\quad \frac{w^2+13w}{2},\ldots$$

auf der zweiten Reihe

$$\frac{w^2+7w}{2},\quad \frac{w^2-9w}{2}+1,\quad \frac{w^2+11w}{2},\quad \frac{w^2-13w}{2}+1,\ldots$$

nach oben von den Mittelfeldern aus. Aehnlich verhalten sich die Reihen nach unten.

Ueberhaupt muss ich zumeist auf die Tafeln hinweisen, welche die charakteristischen Merkmale klar und genau ausdrücken. Auch sind die Tafeln so angelegt, dass alle Wiederholungen von etwaigen scheinbaren Unregelmässigkeiten gegeben sind, so dass es höchstens nöthig ist, bei grossen Wurzeln die Formel analog zu erweitern, was nunmehr eine rein mechanische Arbeit ist. Alle Formeln in den algebraischen Tafeln haben noch die Eigenthümlichkeit, dass bei der Herstellung der aus ihnen hervorgehenden Tetragramme auch zugleich die Felder angegeben sein müssen, in welche die einzelnen Zahlenwerthe gesetzt werden. Es handelt sich ja nicht blos um die gesetzmässige Bildung einzelner Reihen von Zahlen, die eine bestimmte Gliederung besitzen, sondern diese Reihen sollen in einer gewissen Kreuzung, wobei eine und dieselbe Zahl zur Bildung von zwei, drei, selbst vier solcher Reihen verwendet erscheint, eine regelmässige Vertheilung nach gewissen geometrischen Verhältnissen ergeben, und so ausser den Grössenbestimmungen auch noch die Localisation dieser Grössen genau anzeigen. Wollte man dieser Aufgabe auf dem Wege der Algebra allein genügen, so würden äusserst complicirte Formeln entstehen, die wenigstens für den praktischen Gebrauch, d. h. bei der mechanischen Herstellung eines gedachten Tetragrammes, sehr schwer zu handhaben wären.

Ich hielt es daher für die zweckmässigste Form dieses allgemeinen Ausdruckes, die einzelnen Werthbestimmungen der Zahlen gleich jenem Felde einzuschreiben, in welches die Ziffer dieser Werthbestimmung zu stehen kommt, wodurch leichte Ausführung und Richtigkeit eines jeden Tetragrammes erzielt wurde.

Bei dieser Construction ergeben sich noch folgende, wohl zu berücksichtigende Eigenthümlichkeiten der geraden und ungeraden Zahlen.

Da nämlich die Tetragramme aus den ungeraden Wurzeln ihre Leitzahlen in den vier äusseren Eckzahlen und in den vier durch sie begränzten Reihen, sowie in den beiden Diagonalreihen haben, und da die fernere Entwickelung eines jeden solchen Tetragrammes centripetal von aussen nach innen vor sich geht: so muss auch die Bildung dieser Tetragramme aus ihrer algebraischen Form auf demselben Wege vor sich gehen. Man muss bei den vier Eckfeldern beginnen, zuerst von ihnen aus die vier äusseren, sowie die beiden Haupt-Diagonalreihen bilden und dann erst die noch unbesetzten Felder auf dieselbe Weise ausfüllen, wie dieses bei der Construction angegeben wurde.

Bei der Bildung der Tetragramme aus geraden Wurzeln, bei welchen, wie gezeigt worden ist, die vier innersten oder in der Mitte stehenden Zahlen und die beiden Diagonalreihen den Kern bilden, muss die Entwickelung der einzelnen in ein gedachtes Tetragramm gehörigen Zahlen bei den vier Mittelfeldern beginnen und nach aussen im ganzen Umfange dieses Kernes so lange fortgesetzt werden, bis alle Felder des zu construirenden Tetragrammes besetzt sind.

Das Verhalten

der magischen Quadrate zum Kreise

oder

die magischen Kreise.

Stellt man sich den Mittelpunkt eines Quadrates, welches in eine der Quadratzahl entsprechende Felderzahl getheilt ist, als Mittelpunkt aller Kreise vor, die man bilden kann, wenn alle Mittelpunkte der Felder durch Kreise verbunden werden, so erhält man eine Construction, die aller Wahrscheinlichkeit nach ebenfalls schon im frühesten Alterthume bekannt sein musste, und mit dem Namen der „magischen Kreise“ bezeichnet worden war.

Trägt man nun in diese Construction die Zahlen des betreffenden Quadrates magisch geordnet ein, so ergeben sich daraus gewisse Beziehungen und Verhältnisse sowohl der Linien untereinander, als auch der Zahlen zu den Linien.

I. Verhältnisse der Linien untereinander.

Betrachtet man die auf solche Weise entstandenen Constructionen *Nro. 8, 11, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36*, so sieht man zwei von einander wesentlich verschiedene Formen derselben entstehen, je nachdem nämlich das Quadrat eine ungerade oder eine gerade Seitenzahl zeigt. Bei den magischen Kreis-Constructionen aus ungerader Seitenzahl liegt der Mittelpunkt des Quadrates, aus welchem alle Mittelpunkte der einzelnen Felder durch Kreislinien verbunden werden können, im Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen des Centralquadrates; die magischen Kreis-Constructionen aus gerader Seitenzahl aber haben ihr Centrum im Eckpunkte der vier Mittelfelder eines solchen Quadrates. Daraus geht nun hervor, dass die aus den genannten Mittelpunkten zu den Mittelpunkten der einzelnen Felder gezogenen Radien sich nach Lage und Grösse wesentlich von einander unterscheiden müssen.

Was die Lage anbelangt, so sehen wir bei den magischen Kreis-Constructionen aus ungerader Seitenzahl (*Taf. LIII, Nro. 76*) vier Durchmesser, die sich unter rechten Winkeln schneiden, während bei denen aus gerader Seitenzahl nur die zwei diagonalen Durchmesser in dieser Lage gegen einander erscheinen. Daher werden die Quadrate von ungerader Seitenzahl in acht congruente rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke zerlegt, welche das ganze Quadrat umfassen; die Quadrate mit gerader Seitenzahl (*Taf. LIV. Nro 77*) jedoch zerfallen in acht congruente stumpfwinklige gleichschenklige Dreiecke, die aber den Inhalt des Quadrates nicht vollständig ausmachen. Diese acht congruenten Dreiecke stimmen ferner auch darin überein, dass die in ihnen gelegenen correspondirenden Radien gleiche Längen und gleiche Lageverhältnisse haben.

Die Anzahl der in einem Quadrate gezogenen Kreise steigt nach dem Verhältniss der Quadrate in einer Reihe zweiten Ranges auf, und zwar ist ihre Anzahl bestimmt durch den Ausdruck $\frac{w(w-1)}{2}$, worin w, wie früher, die Wurzel des Quadrates bezeichnet. Bei der geometrischen Construction ist aber diese

Zahl nicht ersichtlich, da gewisse Kreise sich decken, wodurch eine Verminderung derselben entsteht. Wie gleich aus den ersten Tetragrammen ersichtlich ist, liegen in der Peripherie eines Kreises die Mittelpunkte von 4 oder 8 Feldern; dadurch aber, dass in einigen Fällen zwei Kreise zusammenfallen, kommen entweder 12 oder 16 Mittelpunkte in Einen sichtbaren Kreis zu liegen. Die Aufsteigung der Radien geht gemäss der geometrischen Construction im quadratischen Verhältnisse vor sich, wobei aber die horizontale und die verticale Richtung in's Auge gefasst werden muss.

Die Entfernungen der Mittelpunkte der einzelnen Quadratfelder vom Centralpunkte werden den beiden Arten der Quadrate gemäss verschieden sein. Beiderseits jedoch kann man sie als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke, mithin unter der Form $\sqrt{x^2+y^2}$ hinstellen, wo x und y veränderlich, in einzelnen Fällen y oder $x=0$ sein kann.

Da die Entfernungen der Mittelpunkte je zweier Quadratfelder von einander eine (stetige) constante ist, so wird auch das Wachsen dieser Entfernungen ein regelmässiges sein, und ebenso werden die aus $\sqrt{x^2+y^2}$ entstehenden Grössen regelmässig aufsteigen.

Betrachten wir nun von beiden Arten der Quadrate jede besonders. Die aus ungerader Zahl entstandenen Quadrate haben, wie erwähnt, den Mittelpunkt, den Schwerpunkt des Quadrates, in der Mitte eines Feldes — man könnte es Central-Feld nennen. Durch Senkrechte, welche zu den Seiten des Quadrates parallel gezogen werden, sind die Mittelpunkte zweier Reihen von Quadratfeldern verbunden, und hier eben tritt der Fall ein, wo die eine Kathete gleich 0 wird, und die Längen rationale Grössen sind, was sonst nie der Fall ist; überhaupt sagt schon die Formel $\sqrt{x^2+y^2}$ deutlich genug, dass nur wenige rationale Grössen vorkommen. Die Aufsteigung dieser Entfernungen der einzelnen Mittelpunkte der Quadratfelder vom Centralpunkte ist die Reihe der natürlichen Zahlen.

Da durch die beiden erwähnten Senkrechten das Quadrat in vier gleiche Quadrate getheilt wird, von denen jedes in zwei congruente Dreiecke zerfällt, und es sodann nur übrig bleibt, die Quadratfelder in Einem solchen Dreiecke hinsichtlich ihres Verhaltens zum Central-Felde zu betrachten: so können aus der Formel $\sqrt{x^2+y^2}$ folgende Fälle hervorgehen:

x und y können 0 sein; folglich $\sqrt{x^2+y^2} = 0$, der Mittelpunkt des Centralfeldes;

x constant aufsteigend und $y = 0$ oder umgekehrt, die beiden bereits erwähnten Quadratfelder-Reihen mit den natürlichen Zahlen;

x constant und y nach der Reihe der natürlichen Zahlen aufsteigend, oder umgekehrt. Ist z. B. $x = 3$ und $y = 0, 1, 2, 3,$ etc., so erhält man die Längen:

$$\sqrt{9+0};\quad \sqrt{9+1};\quad \sqrt{9+4};\quad \sqrt{9+9}; \text{ etc.}$$

oder ist $y = 2$ und $x = 0, 1, 2, 3,$ etc.

so erhält man die Längen:

$$\sqrt{0+4};\quad \sqrt{1+4};\quad \sqrt{4+4};\quad \sqrt{9+4}; \text{ etc.}$$

endlich können noch x und y constant aufsteigen, z. B.

$$x,\ y = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

so erhält man:

$$\sqrt{1+1};\quad \sqrt{4+4};\quad \sqrt{9+9};\quad \sqrt{16+16} \text{ etc.}$$

oder $$\sqrt{2};\quad 2\sqrt{2};\quad 3\sqrt{2};\quad 4\sqrt{2};\quad 5\sqrt{2}; \text{ etc.}$$

Sowie hier das x und y veränderlich ist, eben so ist es auch bei den Quadraten aus gerader Wurzel; nur kann hier nicht der Fall eintreten, dass x oder y, oder beide 0 sind; desgleichen steigen x und y mit der Hälfte der ungeraden Zahlen, also mit

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \text{etc.}$$

auf, und die Resultate, welche die Formel $\sqrt{x^2+y^2}$ hier liefert, sind ganz andere. Wenn

x constant, z. B. $\frac{1}{2}$ und y, $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc. wachsend wäre, so ergibt $\sqrt{x^2+y^2}$ folgende Reihe:

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}};\quad \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}};\quad \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}};\quad \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}};\quad \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{81}{4}}; \text{ etc.}$$

oder $$\frac{1}{2}\sqrt{2};\quad \frac{1}{2}\sqrt{10};\quad \frac{1}{2}\sqrt{26};\quad \frac{1}{2}\sqrt{50};\quad \frac{1}{2}\sqrt{82}; \text{ etc.}$$

Dasselbe ist der Fall, wenn y constant und x wachsend ist.

Wenn x und y gleichzeitig aufsteigen, also die Werthe haben:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \text{etc.,}$$

so erhält man die Reihe:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \frac{3}{2}\sqrt{2};\ \frac{5}{2}\sqrt{2};\ \frac{7}{2}\sqrt{2};\ \text{etc.}$$

oder $$\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\sqrt{18};\ \frac{1}{2}\sqrt{50};\ \frac{1}{2}\sqrt{98};\ \text{etc.}$$

Ist $x = \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},$ etc.

und $y = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},$ etc.

so ergibt $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Werthe:

$$\frac{1}{2}\sqrt{10};\ \frac{1}{2}\sqrt{34};\ \frac{1}{2}\sqrt{74};\ \frac{1}{2}\sqrt{130};\ \frac{1}{2}\sqrt{202};\ \text{etc.}$$

Ist $x = \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2},$ etc.

und $y = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2};$ etc.

so ist $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26};\ \frac{1}{2}\sqrt{58};\ \frac{1}{2}\sqrt{106};\ \frac{1}{2}\sqrt{170};\ \frac{1}{2}\sqrt{250};$ etc.

Ist $x = \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ \frac{13}{2},$ etc.

und $y = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},$ etc.

so ergibt $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Werthe:

$$\frac{1}{2}\sqrt{50};\ \frac{1}{2}\sqrt{90};\ \frac{1}{2}\sqrt{146};\ \frac{1}{2}\sqrt{218};\ \frac{1}{2}\sqrt{300};\ \text{etc.}$$

Auf diese Weise sind die einzelnen Reihen ersichtlich gemacht, und aus der Natur von $\sqrt{x^2 + y^2}$ geht schon hervor, wie die Quadrate der Radien mit der Differenz von 8 oder 2.8, 3.8, 4.8, etc. aufsteigen. Dass nur von der Aufsteigung der Quadrate der Radien die Rede sein kann, liegt ebenfalls der Formel $\sqrt{x^2 + y^2}$ zum Grunde, die für diese bestimmten Fälle meistens irrationale Werthe ergibt. (Nach Euklid wohl eigentlich nicht irrational, da $(\sqrt{x^2 + y^2})^2$ eine bestimmte commensurable Fläche ist.)

Da in jedem Theile der einzelnen Dreiecke, in welche das Quadrat aus ungerader Seitenzahl durch die Radien zerfällt, nur immer x oder $y = 0$ sein kann, und dies nur bei der einen Kathete, welche zugleich Kathete des ihr anliegenden Dreieckes ist, vorkommt: so erscheint die Aufsteigung der natürlichen

Zahlen nur viermal; eben so die Aufsteigung $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; etc., welche aus den Feldern resultirt, die die Hypotenuse bilden. Die anderen Fälle: x constant, y veränderlich oder umgekehrt, wiederholen sich in jedem Dreiecke; folglich gibt es für je ein bestimmtes x und y in diesem Falle acht Werthe, jedoch darf x oder y nicht 0, oder $x = y$ sein. Bei den Quadraten aus gerader Seitenzahl sind ebenfalls — x constant und y veränderlich oder umgekehrt — acht Fälle für jedes bestimmte x und y vorhanden; nur wenn $x = y$, ergibt die Formel für je ein bestimmtes x oder y vier Werthe, woraus leicht ersichtlich ist, dass es jene Werthe sein werden, welche die Entfernungen der Mittelpunkte der Quadratfelder ausdrücken, die durch die im Quadrate gezogenen Diagonalen verbunden sind.

Nach der Art der Aufsteigung erübrigt noch, die concreten Grössen der Radien zu betrachten. Da die Anzahl der Felder in den Quadraten nach der Seitenzahl im quadratischen Verhältnisse zunimmt, die Entfernungen der Mittelpunkte der einzelnen Felder aber von $\sqrt{x^2 + y^2}$ abhängen, so dürfte nach den früheren Erörterungen die zur Bestimmung der Anzahl der Radien dienende Formel $\frac{n(n-1)}{2}$ keiner weiteren Auseinandersetzung bedürfen. (n bezeichnet die Anzahl der Theile einer Seite.)

Welche und wie viele Radien liegen nun ihrer Grösse nach zwischen 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, etc.?

Geometrisch ist diese Frage wohl leicht gelöst, wie das Bild der Tafeln LIII, LIV, 76 und 77 klar zeigt. Auch algebraisch ist die Bestimmung der Anzahl und der Grösse der Radien einfach, da die Zunahme von x und y eine bestimmte und keineswegs willkürliche ist. Eine einfache Betrachtung wird dies genügend beweisen.

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ist nur möglich, wenn $y = 0$ und $x = 1$ ist;

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, wenn $x = 2$ und $y = 0$ ist.

Es liegt mithin noch der Fall dazwischen, wo

$x = 1$, $y = 1$, folglich $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$.

$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, wenn $x = 3$, $y = 0$ ist;

dazwischen liegt

$x = 2$, $y = 1$, 2 und $x = 2$, $y = 2$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$.

$\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, wenn $x = 4$, $y = 0$ ist;

dazwischen liegt

$$x = 3,\ y = 1,\ 2;\quad \text{folglich } \sqrt{10},\ \sqrt{13}.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5, \text{ wenn } x = 5,\ y = 0;$$

dazwischen

$$x \text{ und } y = 3;\quad x = 4,\ y = 1,\ 2,\ 3;$$

eigentlich vier Fälle:

$$\sqrt{17},\quad \sqrt{18},\quad \sqrt{20},\quad \sqrt{25} = 5;$$

letzterer Fall jedoch fällt mit $x = 5$, $y = 0$ zusammen, folglich nur drei Fälle:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 6, \text{ wenn } x = 6,\ y = 0 \text{ ist};$$

dazwischen

$$x = 4,\ y = 4;\quad x = 5,\ y = 1,\ 2,\ 3;$$

mithin

$$\sqrt{26},\ \sqrt{29},\ \sqrt{32},\ \sqrt{34}.$$

Daraus wird ersichtlich, dass die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegenden Längen der Radien nach den natürlichen Zahlen wachsen. Die Radien in ihrer stufenweisen Aufsteigung sind:

$1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{8},\ 3,\ \sqrt{10},\ \sqrt{13},\ 4,\ \sqrt{17},\ \sqrt{18},\ \sqrt{20},\ 5,\ \sqrt{26},\ \sqrt{29},\ \sqrt{32},\ \sqrt{34},\ 6; \ldots$

Da die Längen der Radien aus den Quadraten gerader Seitenzahl fast durchwegs irrationale Grössen sind, so können wir sie nicht betrachten, wie die früheren. Es bietet sich uns jedoch eine andere gleich in's Auge fallende Eigenthümlichkeit derselben dar. Die aufsteigenden Längen der Radien sind:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{10};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{18};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{26};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{34};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{50};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{58};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{74};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{82};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{90};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{98};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{106};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{122};\ \text{etc.}$$

Daraus wird ersichtlich, dass die Grössen unter dem Wurzelzeichen um 8 aufsteigen; nur fehlt merkwürdiger Weise hie und da ein Glied dieser Reihe, z. B.:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{42};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{66};\ \tfrac{1}{2}\sqrt{114};\ \text{etc.},$$

welches Fehlen der Glieder immer häufiger wird, je grösser die Zahl unter dem Wurzelzeichen ist.

II. Verhältnisse der Zahlen zu den Linien.

Betrachtet man nun die Verhältnisse der Zahlen zu den einzelnen Linien, so sieht man, dass in den Tetragrammen aus ungerader Wurzel die Zahlen, die in den gleichweit vom Mittelpunkte abstehenden Feldern sich befinden, immer die um 1 vermehrte Quadratzahl als Summe ergeben, mit Ausnahme des Centralfeldes, welches, alleinstehend, die Hälfte dieser Zahl ist. Da die Kreise, wie sie sich von der Mitte mehr entfernen, in den höher liegenden Tetragrammen immer wieder zum Vorschein kommen, so bilden auch die Zahlen, die in der Peripherie solcher Kreise liegen, eine arithmetische Reihe. Denkt man sich statt der Zahlen in einem bestimmten Tetragramme die allgemeinen Formeln in der Peripherie eines Kreises stehend, so kann man sich leicht durch Umsetzung die aufsteigenden Reihen, ja die Tetragramme selbst bilden. Man kann bei dieser Bildung sowohl von der Mitte, als auch von dem äussersten Kreise ausgehen; in letzterem Falle jedoch gelangt man nur bis zu den beiden mittleren Kreisen, weil diese immer zuerst gebildet werden müssen.

Die Formeln für die Zahlen, welche in der äussersten Peripherie liegen, sind:

$$\frac{w^2 + w}{2}; \quad \frac{w + 1}{2}; \quad \frac{w^2 - (w - 2)}{2}; \quad \frac{w^2 + (w - 1)\,w + 1}{2};$$

Daraus erhält man für $w = 3$ die Zahlen: 6, 2, 4, 8;
„ $w = 5$ „ „ 15, 3, 11, 23;
„ $w = 7$ „ „ 28, 4, 22, 46;
„ $w = 9$ „ „ 45, 5, 37, 77; u. s. w.

Für den nächsten Kreis ergeben die Formeln

$$\frac{w - 1}{2}; \quad w\,(w-1) + \frac{w - 1}{2}; \quad w^2 - \left(\frac{w - 1}{2}\right) w + 1; \quad w^2 - \left(\frac{w - 3}{2}\right) w;$$

$$w^2 - \left(\frac{w - 3}{2}\right); \quad w - \left(\frac{w - 3}{2}\right); \quad \frac{(w - 1)\,w}{2}; \quad \frac{w\,(w - 3)}{2} + 1$$

durch Einsetzung des Werthes für $w = 5, 7, 9, \ldots$ folgende Reihen:

für $w = 5$	2, 22, 16, 20, 24, 4, 10, 6;
„ $w = 7$	3, 45, 29, 35, 47, 5, 21, 15;
„ $w = 9$	4, 76, 46, 54, 78, 6, 36, 28;
„ $w = 11$	5, 115, 67, 77, 117, 7, 55, 45.

So wie bei diesen Reihen, ebenso verfährt man bei der Bildung der übrigen.

Die Tetragramme aus gerad-gerader Wurzel zeigen in ihrem Verhalten zum Kreise vieles Gemeinsame mit den Tetragrammen aus ungerader Wurzel. Wie bei diesen stehen auch hier jene Zahlen, die sich zur Summe w^2+1 ergänzen, diametral, und sowie nach der Eigenschaft des Kreises ein Quadrat dem andern gleich ist, so ist auch bei den Tetragrammen gerader und ungerader Wurzel die Summe der Zahlen in einem Theile des Quadrates gleich der im anderen Theile.

Die Bildung der Tetragramme gerad-gerader Wurzel geschieht auf dieselbe Weise, wie jener aus ungerader Wurzel. Die Formeln für die Zahlen des äussersten Kreises sind:

$$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+\frac{w}{2};\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right);$$
$$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\frac{w}{2}$$

daraus erhält man für $w = 4$ die Zahlen 16, 13, 1, 4;
„ $w = 8$ „ „ 64, 57, 1, 8;
„ $w = 12$ „ „ 144, 133, 1, 12.

Für den zweiten Kreis sind die Formeln:

$$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2+(w-3)w}{2}+\frac{w}{2};\quad \frac{w^2-(w-3)w}{2}+\frac{w}{2};\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}-$$
$$-\left(\frac{w-4}{2}\right);\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2-(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2+(w-3)w}{2}-$$
$$-\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right);$$

setzt man hierin $w = 8, 12, 16, \ldots$ so erhält man

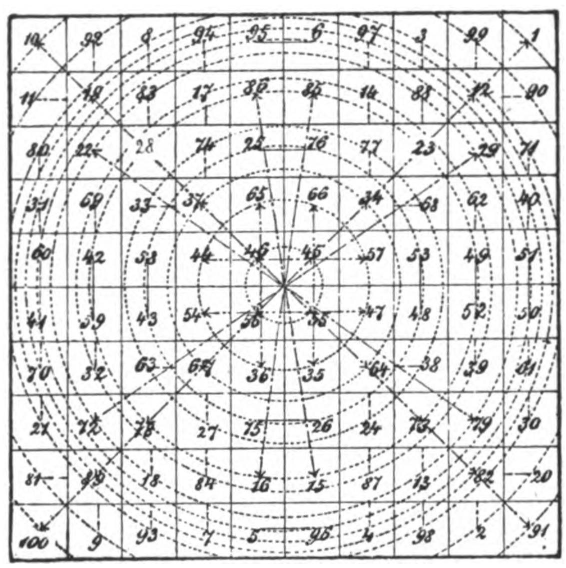
für $w = 8$: 7, 56, 16, 58, 63, 9, 49, 2;
„ $w = 12$: 11, 132, 24, 134, 143, 13, 121, 2;
„ $w = 16$: 15, 240, 32, 242, 255, 17, 225, 2.

Auf dieselbe Weise verfährt man mit den Formeln der nachfolgenden Peripherien.

Die Tetragramme aus ungerad-gerader Wurzel zeigen ein etwas abweichendes Verhalten. Obwohl die geometrische Construction der magischen Quadrate mit ungerad-gerader Seitenzahl sich in Beziehung zum Kreise ganz

den aus gerad-gerader Wurzel anschliesst, so ist doch das Verhalten der Zahlen zur Kreis-Construction ein anderes; denn während dort die sich ausgleichenden Zahlen diametral stehen, befinden sie sich hier immer auf einer Hälfte des Kreises, und nur einige wenige haben die diametrale Stellung behauptet.

Ziehen wir uns im Tetragramm aus der Wurzel 10 die Kreise und Radien und verbinden die sich ausgleichenden Zahlen durch Sehnen, so erhält man nachstehendes Bild.



Man sieht an der Regelmässigkeit der Figur zugleich die Regelmässigkeit des Gesetzes, welches sie darstellt; hier die aufsteigende Reihe der Kreise und Sehnen, dort die der Zahlen. Es liessen sich noch die Winkel, die zu diesen Sehnen gehören, bestimmen; dies wäre jedoch überflüssig, da ihre Grösse zur Zahl in keinem bis jetzt nachgewiesenen directen Verhältnisse steht.

Die Kreise nehmen sammt den in der Peripherie stehenden Zahlen oder Formeln in gleicher Weise ab wie bei denen aus gerad-gerader Wurzel; es ist daher eben so leicht, das Tetragramm auf diese Weise herzustellen.

Die Formeln des letzten Kreises seien:

$$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right); \quad w; \quad w^2; \quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$$

so ergeben sich für die Tetragramme aus den Wurzeln 6, 10, 14 folgende Zahlen:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ist } w = 6 & : & 1,\ 6,\ 36,\ 31 \\ w = 10 & : & 1,\ 10,\ 100,\ 91 \\ w = 14 & : & 1,\ 14,\ 196,\ 183 \end{array}$$

Die Formeln des zweiten Kreises seien:

$$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+\frac{w}{2};\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right);$$

$$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2+(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right);\quad \frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right);$$

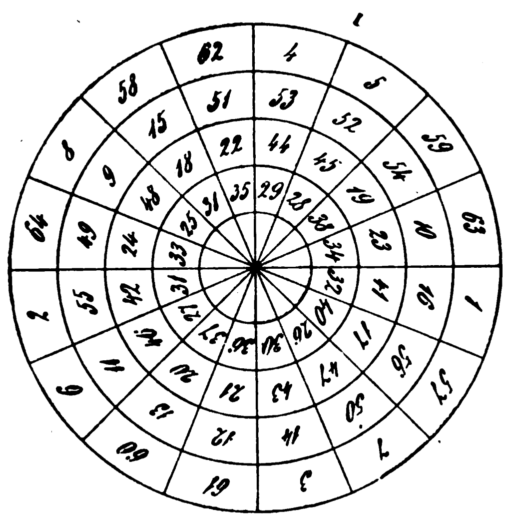
$$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right);\quad \frac{w^2-(w-3)w}{2}+\frac{w}{2};$$

so folgen für die Wurzeln 6, 10, 14 die Zahlen:

$$\begin{array}{rcl} \text{für } w = 6 & : & 30;\ 35;\ 32;\ 7;\ 25;\ 5;\ 2;\ 12; \\ w = 10 & : & 90;\ 99;\ 92;\ 11;\ 81;\ 9;\ 2;\ 20; \\ w = 14 & : & 192;\ 195;\ 184;\ 15;\ 169;\ 13;\ 2;\ 28; \end{array}$$

Auf diese Weise ist durch die geometrische Construction, durch Kreis und Quadrat, die eigenthümliche Vertheilung der Zahlen bedingt.

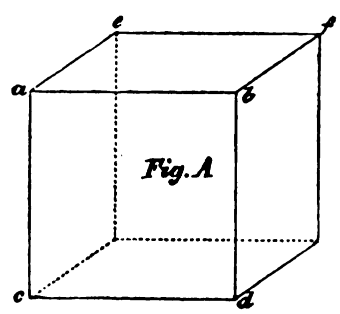
Wir könnten uns daher auch die Zahlen innerhalb der Kreise stehend denken, wo die mittelsten Horizontalreihen der Quadrate in den innersten Kreis, die nächsten in den zweiten u. s. w. zu stehen kommen. Ein Beispiel davon liefert nachstehende Figur.



Deutlich zeigt es sich auch hier, wie die grössten und kleinsten Zahlen in dem äussersten Kreis situirt sind, die nächst kleineren und grösseren in dem zweiten u. s. w. Die Summe der Zahlen, die in einem Halbkreise steht, ist der Summe der Zahlen im andern Halbkreise gleich, sowie sich auch die Zahlen in den Scheitelwinkeln auf die gleiche Summe $\frac{w^3 + w}{2}$ ergänzen. Da nun alles dieses Eigenschaften der Kreis-Construction sind, wie wir sie bei dem Quadrate kennen gelernt haben, so kann der Kreis auch die Stelle des Quadrates einnehmen, und es wird daraus ersichtlich, inwieweit die Natur des Kreises mit dem Wesen des Quadrates übereinstimmt.

Der magische Cubus.

Die Herstellung eines Cubus aus gerad-gerader Wurzel ist nach unserer Gesetztafel eben so leicht, wie die eines Tetragrammes. Der Cubus, welcher aus einer gerad-geraden Wurzel hergestellt wird, hat die Eigenschaft, dass er nicht nur in horizontale Schichten zerlegt werden kann, welche einzelne Tetragramme bilden, sondern auch in verticale.



Stellt uns daher die Figur A einen solchen Cubus vor, so müssen wir uns in demselben sowohl Tetragramme parallel zur Fläche *abcd*, wie auch parallel zur Fläche *abef* vorstellen.

Zum deutlicheren Verständnisse soll hier der Cubus aus der Zahl 4 construirt werden. Derselbe besteht aus vier Tetragrammen, in welche die

Zifferreihe von 1 — 64 eingetragen ist und zwar so, wie die Tetragramme I, II, III, IV zeigen:

I

a	4	62	63	1	a
b	57	7	6	60	b
c	5	59	58	8	c
d	64	2	3	61	d

II.

a	53	11	10	56	a
b	16	50	51	13	b
c	52	14	15	49	c
d	9	55	54	12	d

III.

a	45	19	18	48	a
b	24	42	43	21	b
c	44	22	23	41	c
d	17	47	46	20	d

IV.

a	28	38	39	25	a
b	33	31	30	36	b
c	29	35	34	32	c
d	40	26	27	37	d

Denken wir uns nun diese vier Tetragramme so über einander gelegt, dass *I* oben, darunter *II* und hernach *III* und *IV* liegen, so erhalten wir aus den senkrecht über einander liegenden Reihen neue Tetragramme, wenn wir die Reihen *(aa)* *(bb)* *(cc)* *(dd)* und *(ad)* *(da)* verbinden. Z. B.

(aa)

4	62	63	1
53	11	10	56
45	19	18	48
28	38	39	25

Als die Summe einer Reihe ergibt sich in diesem Falle 130, als die Summe aller Zahlen eines Tetragrammes 520 und als die Summe aller

Zahlen im Cubus 2080. Allgemein ist in jedem Cubus aus gerad-gerader Wurzel die Summe einer Reihe

$$(w^3 + 1)\frac{w}{2} = \frac{w^4 + w}{2} \qquad \text{(I}$$

die Summe der Zahlen eines Tetragrammes

$$(w^3 + 1)\frac{w^2}{2} = \frac{w^5 + w^2}{2} \qquad \text{(II}$$

und die Summe aller Zahlen im Cubus

$$(w^3 + 1)\frac{w^3}{2} = \frac{w^6 + w^3}{2} \qquad \text{(III}$$

Was die algebraische Tafel *LII. Nr.* 75 betrifft, so ist nur zu bemerken, dass die eine Tafel zur Construction aller Tetragramme, die den Cubus bilden, hinreicht. Man bildet sich nämlich nach dem Gesetze, wie es die Tafel zeigt, das erste Tetragramm und hierauf die übrigen, indem man dort, wo der Ausdruck mit Cursiv-Schrift bezeichnet ist, $\frac{w^2}{2}$ addirt, wo er mit Ronde-Schrift bezeichnet ist, $\frac{w^2}{2}$ subtrahirt. Das auf solche Art gebildete Tetragramm dient als Muster zur Herstellung des dritten, was wieder theils durch Addition, theils durch Subtraction von $\frac{w^2}{2}$ geschieht. Auf dieselbe Weise entsteht aus dem dritten Tetragramm das vierte u.s.f. Um nun aus den Tetragrammen den Cubus zu formiren, legt man die $\frac{w}{4}$ ersten Tetragramme gerade in der Lage und Reihenfolge über einander, wie sie gebildet wurden, darauf die $\frac{w}{2}$ folgenden Tetragramme, jedoch so, dass die höchste Ziffer rechts oben in der Ecke ist, nicht wie früher die niederste, endlich die letzten $\frac{w}{4}$ Tetragramme wieder, wie sie gebildet wurden. Klar zeigt dies der Cubus aus der Wurzel 8, wo die Tetragramme schon so gewendet erscheinen, wie sie übereinander zu legen sind.

Tetragramme

aus der

8.

I.

8	506	510	4	5	507	511	1	2052
9	15	499	501	500	502	10	16	2052
496	18	22	492	493	19	23	489	2052
25	487	483	29	28	486	482	32	2052
481	31	27	485	484	30	26	488	2052
24	490	494	20	21	491	495	17	2052
497	503	11	13	12	14	498	504	2052
512	2	6	508	509	3	7	505	2052

II.

40	474	478	36	37	475	479	33
41	47	467	469	468	470	42	48
464	50	54	460	461	51	55	457
57	455	451	61	60	454	450	64
449	58	59	453	452	62	63	456
56	458	462	53	52	459	463	49
465	471	43	45	44	46	466	472
480	34	38	476	477	35	39	473

V.

377	135	131	381	380	134	130	384	2052
376	370	142	140	141	139	375	369	2052
145	367	363	149	148	366	362	152	2052
360	154	158	356	357	155	159	353	2052
160	354	358	156	157	355	359	153	2052
361	151	147	365	364	150	146	368	2052
144	138	374	372	373	371	143	137	2052
129	383	379	133	132	382	378	136	2052

VI.

345	167	163	349	348	166	162	352
344	338	174	172	173	171	343	337
177	335	331	181	180	334	330	184
328	186	190	324	325	187	191	321
192	222	326	188	189	323	327	185
329	183	179	333	332	182	178	336
176	170	342	340	341	339	175	169
161	351	347	165	164	350	346	168

Die Summe einer

Die Summe aller Zahlen eines

Die Summe aller Zahlen

zum Würfel

Wurzel

8.

III.									IV.							
441	71	67	445	444	70	66	448	2052	409	103	99	413	412	102	98	416
440	434	78	76	77	75	439	433	2052	408	402	110	108	109	107	407	401
8	431	427	85	84	430	426	88	2052	113	399	395	117	116	398	394	120
424	90	94	420	421	91	95	417	2052	392	122	126	388	389	123	127	385
96	418	422	92	93	419	423	89	2052	128	386	390	124	125	387	391	121
425	87	83	429	428	86	82	432	2052	393	119	115	397	396	118	114	400
80	74	438	436	437	435	79	73	2052	112	106	406	404	405	403	111	105
65	447	443	69	68	446	442	72	2052	97	415	411	101	100	414	410	104

VII.									VIII.							
200	314	318	196	197	315	319	193	2052	232	282	286	229	228	283	287	225
201	207	307	309	308	310	202	208	2052	233	239	275	277	276	278	234	240
304	210	214	300	301	211	215	297	2052	272	242	246	268	269	243	247	265
217	295	291	221	220	294	290	224	2052	249	263	259	253	252	262	258	256
289	223	219	293	292	222	218	296	2052	257	255	251	261	260	254	250	264
216	298	302	212	213	299	303	209	2052	248	266	270	244	245	267	271	241
305	311	203	205	204	206	306	312	2052	273	279	235	237	236	338	274	280
320	194	198	316	317	195	199	313	2052	288	226	230	284	285	227	231	281

Reihe = 2052.

Tetragrammes = 16.416.

des Würfels = 131.328.

Was das Princip der Reihen anbelangt, wie wir es bei den Tetragrammen aus gerad-gerader Wurzel gefunden haben, so ist zu erwähnen, dass hier jede der zwei Haupt-Diagonalen nicht eine stetige Reihe, sondern zwei solche Reihen enthält, die beim Durchschnitte der Diagonalen ihre Gränze haben. So z. B. befinden sich im ersten Tetragramme des aus der Zahl 8 gebildeten Cubus die Reihen:

1, 10, 19, 28 und 485, 494, 503, 512.

Die Reihen, die zu den Diagonalen parallel verlaufen, sind theils dieselben, wie in den Tetragrammen aus gerad-gerader Wurzel, theils aber insofern verschieden, dass die Zahlenwerthe hier so nahe dem Cubus der Zahl liegen, wie dort dem Quadrate. Es ist daher überflüssig, diese Reihen hier noch einmal zu erwähnen, und wir gehen zu jenen über, die dann entstehen, wenn die einzelnen Tetragramme zur Formirung des Cubus übereinander gelegt werden.

Wenn wir ein solches Tetragramm betrachten, so bemerkėn wir in den verticalen Streifen Reihen, die mit der Differenz von $\frac{w^2}{2}$ aufsteigen. Doch bildet ein solcher Streifen nicht eine, sondern drei Reihen, die wir allgemein so ausdrücken können:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & a; & a+\frac{w^2}{2}; & a+2\frac{w^2}{2}; & a+3\frac{w^2}{2}; \ldots \\ \text{II} & b; & b+\frac{w^2}{2}; & b+2\frac{w^2}{2}; & b+3\frac{w^2}{2}; \ldots \\ \text{III} & c; & c+\frac{w^2}{2}; & c+2\frac{w^2}{2}; & c+3\frac{w^2}{2}; \ldots \end{array}$$

Nach dem Cubus aus der Zahl 24 würden diese Reihen folgende numerische Werthe erhalten:

I 1; 289; 577; 865; 1153; 1421; . . .
II 12096; 11708; 11420; 11132; 10844; . . .
III 5185; 5473; 5761; 6049; 6337; 6625; . . .

Auch die Diagonalen enthalten eigenthümliche Reihen und zwar vier, deren Differenz $\frac{w}{2}$ (2 w + 1) + 1 ist, wobei jede Reihe die alternirenden Felder einnimmt.

Sowohl diese, als die früher besprochenen Reihen zeigt das beigefügte Tetragramm aus der Wurzel 8, bei welchem die Zusammenlegung der einzelnen Tetragramme mit grösseren und kleineren Ziffern markirt ist.

8	506	510	4	5	507	511	1
40	474	478	36	37	475	479	33
441	71	67	445	444	70	66	448
409	103	99	413	412	102	98	416
377	135	131	381	380	134	130	384
345	167	163	349	348	166	162	352
200	314	318	196	197	315	319	193
232	282	286	228	229	283	287	225

Noch klarer würden diese Reihen und die Construction des Cubus hervortreten, wenn man einen solchen aus der Wurzel 24 construiren möchte, indem dann die Anzahl der Glieder einer Reihe bedeutend grösser ist.

Die modificirten Tetragramme.

Aus den einfachen magischen Quadraten, welche aus natürlichen Zahlenreihen hervorgegangen sind, und nur den Stellenwerth eines jeden Feldes im Quadrate bezeichnen, können andere Quadrate entstehen, welche, weil die Grundform mehr oder weniger abgeändert erscheint, modificirte Tetragramme heissen.

In dieser Hinsicht sind mir bis jetzt zwei Arten solcher Abänderungen bekannt.

Erste Art.

Die erste Art der Modification besteht darin, dass man den ganzen Bau des Tetragrammes ungeändert lässt, und die Abänderung bloss mit der Zahlenreihe

vornimmt, welche in die Felder des Quadrates eingetragen werden soll. Mit anderen Worten, man kann statt der natürlichen Zahlenreihe in die Felder eines jeden magischen Quadrates jede beliebige arithmetische oder geometrische oder Potenz-Reihe eintragen, ohne dass dadurch das Quadrat aufhört, ein magisches zu sein, wenn man nur eine mit der Felderzahl gleiche Anzahl von Gliedern dieser Reihen wählt, und sie in derselben Aufeinanderfolge einträgt, wie es mit den Gliedern der natürlichen Zahlenreihe der Fall war. Ist die einzutragende Reihe eine arithmetische, so wird dadurch ein magisches Quadrat entstehen, dessen horizontale, verticale und haupt-diagonale Zahlenreihen dieselbe Summe ergeben. Ist aber die einzutragende Reihe eine geometrische oder eine Potenz-Reihe, so werden alle Reihen gleiche Producte aufweisen.

Da durch diese Modification der magischen Quadrate nicht allein in dem gegenseitigen ziffermässigen Verhältnisse der in einem und demselben Tetragramme localisirten Zahlen eine besondere Abänderung herbeigeführt wird, sondern auch die Beziehungen jener Zahlen alterirt werden, welche in den gleichnamigen Feldern der auf gleiche Weise modificirten Tetragramm-Reihen enthalten sind: so wurde zum Zwecke der leichteren Uebersicht in die Quadrate aus gerader Seitenzahl auf *Tafel II, III, V, IX, XIII, Nr. 10, 17, 23, 29, 35...* die arithmetische Reihe eingetragen, deren Anfangsglied die Einheit und deren stetige Differenz $+4$ ist. In den Quadraten mit ungerader Seitenzahl hingegen findet sich auf den *Tafeln I, II, XLIII, XLIV, XLV,* die Potenz-Reihe aus der Wurzel 3, welche mit der Wurzel beginnt und um die Einheit ihres Exponenten zunimmt, eingefügt.

Aus der näheren Betrachtung der modificirten Tetragramme, welche eine arithmetische Progression enthalten, geht nun hervor, dass sie aus dem einfachen oder dem Grund-Tetragramme auch abgeleitet werden können, wenn man die Zahl eines jeden Feldes aus nachstehender Formel hervorgehen lässt. Ist a das erste Glied der Grundreihe, n der Stellenzeiger des Feldes, dessen Zahl zu bestimmen ist, und d die constante Differenz der einzutragenden Reihe, so erhält man für jedes beliebige Feld die ihm zukommende Zahl durch den Ausdruck

$$a + (n-1)\,d$$

Wenn also die einzutragende arithmetische Reihe, wie dieses in den beigefügten Tafeln geschehen ist, mit 1 beginnt und mit der Differenz 4 aufsteigt, so er-

hält man für die natürlich fortlaufenden Felder

1, 2, 3, 4, 5, …, 63, 64

die Werthe:

1 + (1—1) 4, 1 + (2—1) 4, 1 + (3—1) 4, 1 + (4—1) 4, 1 + (5—1) 4,…
1 + (63—1) 4, 1 + (64—1) 4,… = 1, 5, 9, 13, 17, … 249, 253,..

In den so entstandenen modificirten Tetragrammen ergeben die gleichnamigen Felder arithmetische Reihen verschiedener Ordnungen mit verschiedenen Differenzen, je nachdem die Aufsteigung der Tetragramme nach einer oder der andern Wurzelgruppe erfolgt. So bilden die Zahlen, welche neben dem linken oberen Eckfelde stehen, in den Tetragrammen aus den geraden Wurzeln

4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22,…

die Reihe

53, 125, 229, 365, 533, 733, 965, 1229, 1525, 1853, …

welche zweiten Ranges ist mit der Differenz +32. Stellt man aber die Glieder dieser Progression so zusammen, wie sie den gerad-geraden Wurzeln 4, 8, 12, 16, 20, . . . und den ungerad-geraden 6, 10, 14, 18, 22, . . . zukommen, so erhält man zwei arithmetische Progressionen zweiten Ranges, welche aber die Differenz +128 zeigen. Diese Reihen sind

a) für die gerad-geraden Wurzeln:

53, 229, 533, 965, 1525, …

b) für die ungerad-geraden Wurzeln:

125, 365, 733, 1229, 1853, …

Die Summen der einzelnen Streifen zeigen bei den modificirten Tetragrammen gerad-gerader Wurzel die Reihe:

124, 1016, 3444, 8176, 15980, . . .

welche dritter Ordnung ist mit der Differenz + 768; bei den Tetragrammen ungerad-gerader Wurzel stellt sich eine Reihe desselben Ranges mit derselben Differenz heraus, nämlich:

426, 1990, 5474, 11646, 21274,…

Werden diese zwei Reihen nach der natürlichen Ordnung der geraden Zahlen zusammengestellt, so hat man die neue Reihe:

124, 426, 1016, 1990, 3444, 5474, 8176, 11646, 15980, 21274,…

welche vom dritten Range ist und mit der Diff. 96 aufsteigt.

Die Summen aller in den modificirten Tetragrammen von geraden Wurzeln enthaltenen Zahlen geben die Reihe:

496, 2556, 8128, 19900, 41328, 76636, 130816,....

eine Reihe vierter Ordnung mit der Differenz 768. Wird aber diese Reihe in zwei gespalten nach den gerad-geraden und den ungerad-geraden Wurzeln, so erhält man für beide Wurzel-Kategorien arithmetische Reihen vierter Ordnung mit der Differenz 12288 und zwar:

a) für die gerad-geraden die Reihe:

496, 8128, 41328, 130816, ...

b) für die ungerad-geraden die Reihe:

2556, 19900, 76636, 209628, ...

In Bezug auf die geometrischen Reihen, welche in ein magisches Quadrat eingetragen werden, ist zu bemerken, dass die aus der Multiplication der Zahlen eines Streifens entstehenden Producte in den aufsteigenden Tetragrammen eine geometrische Progression 3. Ordnung, die Totalproducte aller Zahlen jedoch eine geometrische Progression 4. Ordnung bilden.

Trägt man endlich nach dem Gesetze in die Felder eines magischen Quadrates die Glieder einer Potenz-Reihe derselben Basis ein, so erhält man sie nach ihren Exponenten magisch geordnet, d. h. die Exponenten bilden für sich das Tetragramm, und zeigen alle zwischen ihren Potenzen obwaltenden Beziehungen. Sie geben daher nicht blos die Verhältnisse der Potenzen desselben Tetragrammes unter einander an, sondern sie machen auch jene Relationen ersichtlich, welche zwischen den gleichnamigen Feldern der Tetragrammen-Reihe stattfinden. Heisst z. B. eine solche Potenz-Reihe, wie *Tafel I, II. Nro 7, 15* zeigt,

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \quad . \quad . \quad . \quad .$$

so wird das Product eines Streifens, wenn w wieder die Wurzel des Tetragrammes bezeichnet,

$$P = a^{\frac{w^3+w}{2}}$$

sein. Eben so wird das Product aller in einem Tetragramm enthaltenen Potenzen durch die Formel ausgedrückt:

$$TP = a^{\frac{w^4+w^2}{2}},$$

In den natürlich aufsteigenden Tetragrammen ungerader Wurzeln ergeben die Potenzen in den rechten oberen Eckfeldern die Reihe:

$$a^4, \quad a^{11}, \quad a^{22}, \quad a^{37}, \quad a^{56}, \quad \ldots$$

Die Producte aus den Potenzen eines Streifens die Reihe:

$$a^{15}, \quad a^{65}, \quad a^{175}, \quad a^{369}, \quad a^{671}, \ldots$$

Die Totalproducte aller Potenzen die Reihe:

$$a^{45}, \quad a^{325}, \quad a^{1225}, \quad a^{3321}, \quad a^{7381}, \ldots$$

Trägt man in die Felder eines Quadrates mit ungerader Seitenzahl Potenz-Reihen mit gebrochenen Exponenten ein, deren Nenner aber gleich sind, z. B: *Taf. I. Nr. 4, 5. 6.*

$$a^{\frac{1}{b}}, \quad a^{\frac{2}{b}}, \quad a^{\frac{3}{b}}, \quad a^{\frac{4}{b}}, \ldots$$

so haben wir dieselben nach den Zählern magisch geordnet. Dann lautet das Product eines Streifens

$$P = a^{\frac{w^3+w}{2b}}$$

und das Totalproduct hat die Formel

$$TP = a^{\frac{w^4+w^2}{2b}}$$

Denkt man sich in die aus den natürlichen Zahlen gebildeten Tetragramme **Reihen zweiter Ordnung** eingetragen, und zwar so, dass das 1. Glied der Reihe dorthin zu stehen kommt, wo früher 1 war, das 2. Glied dorthin, wo 2, das dritte Glied, wo 3, etc. stand, so ergeben sich bei so modificirten Tetragrammen Summen, welche den Charakter der Reihen zweiter Ordnung an sich tragen.

Modificirte Tetragramme

mit eingetragenen Reihen zweiter Ordnung von der Differenz 1.

Aus den Quadraten der ungeraden Zahlen.

3.

	10	45	**3**	58
	6	**15**	28	49
	36	1	**21**	58
54	52	61	25	46

5.

	66	300	28	210	**6**	610
	10	**78**	325	**36**	136	585
	153	15	**91**	231	45	535
	55	**171**	1	**105**	253	585
	276	21	190	3	**120**	610
580	560	585	635	585	560	460

7.

	253	1128	136	861	55	630	**10**	3073
	15	**276**	1176	153	903	**66**	435	3024
	465	21	**300**	1225	**171**	666	78	2926
	91	496	28	**325**	946	190	703	2779
	741	105	**528**	1	**351**	990	210	2926
	231	**780**	36	561	3	**378**	1035	3024
	1081	120	820	45	595	6	**406**	3073
2961	2877	2926	3024	3171	3024	2926	2877	2289

Betrachten wir zuerst die Tetragramme aus ungerader Seitenzahl, so haben die sonst gleichartigen Summen folgende Form:

$$a;\quad a+b;\quad a+3b;\quad a+6b;\ .\ .\ .$$

Die mittelste Reihe ergibt eine Summe, die als Anfang zweier, nach entgegengesetzten Seiten wachsender oder abnehmender Reihen zu betrachten ist: daher ist es auch leicht ersichtlich, dass je zwei, von der mittelsten Reihe gleichweit abstehende Reihen eine gleiche Summe ergeben, was sowohl von den horizontalen, als von den verticalen Reihen gilt.

Ferner besitzen diese Tetragramme noch die Eigenthümlichkeit, dass die Summen der von der Mitte gleichweit abstehenden Horizontalreihen gleich sind den Summen der gleichweit von der Seite abstehenden Verticalreihen. Wie früher erwähnt, sind die Summen Reihen zweiter Ordnung mit der Differenz w^2.

Die Aufsteigung in den einzelnen Tetragrammen ergibt sich, wenn man in der Formel u_n, die zu Anfang des algebraischen Schlüssels aufgestellt wurde, die Werthe einsetzt.

$$u_n = \tfrac{1}{2}(w-1)\left(\frac{w}{4}-2\right)u_3 - \left(\frac{w}{4}-1\right)\left(\frac{w}{4}-2\right)u_2 + \\ + \tfrac{1}{2}\left(\frac{w}{4}-2\right)\left(\frac{w}{4}-3\right)u_1$$

Welche Eigenschaften diese aufsteigenden Werthe besitzen, sehen wir z. B. an den rechten oberen Eckzahlen. Bei den Tetragrammen aus den ungeraden Zahlen nehmen sie gleichsam eine die Tetragramme beziffernde Stellung ein, da die Werthe 2, 3, 4, 5, etc. zum Vorschein kommen. Für die Tetragramme, in welche Reihen zweiter Ordnung eingetragen sind, resultiren die Werthe:

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \text{etc.}$$

mithin bei den Triangularzahlen die Werthe:

3, 6, 10, 15, 21, etc.

Es erübrigt nur noch die Reihe zu charakterisiren, von der man bei der Bildung der Summen der einzelnen Reihen ausgeht. Dazu gelangt man, wenn man die Summe aller, in einem Tetragramme enthaltenen Zahlen zu Grunde legt. Die Summe einer Reihe zweiter Ordnung ist:

$$S = n u_1 + \frac{n(n-1)}{2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} d_2$$

wenn u das erste Glied, n die Anzahl der Glieder, d_1 und d_2 die Differenzen bezeichnen. Da in den Tetragrammen n immer $= w^2$ ist, so wird

$$S = w^2 u + \frac{w^2(w^2-1)}{2} d_1 + \frac{w^2(w^2-1)(w^2-2)}{2.3} d_2$$

Wie schon erwähnt, sind die Summen der einzelnen Reihen insofern von einander verschieden, dass sie eine Reihe zweiter Ordnung ergeben, und zwar sind die Differenzen der Art, dass, wenn a die Summe der mittelsten Horizontalreihe

ist, bei dem Tetragramme aus der Wurzel 7 sich folgende Reihe ergibt:

$$a, \quad a+3w^2, \quad a+5w^2, \quad a+6w^2$$

Wenn wir daher die Differenzen summiren und von der Totalsumme der in einem Tetragramme enthaltenen Zahlen subtrahiren, hierauf das ganze durch die Anzahl der horizontalen Summen dividiren, so ergibt sich das mittelste Glied a

$$a = \frac{1}{w}\left[\left(\binom{w^2}{1}u_1 + \binom{w^2}{2}d_1 + \binom{w^2}{3}d_2\right) - 2\left(\left(\frac{w-1}{2}\right)_1 U_1 + \left(\frac{w-1}{2}\right)_2 \delta_1 + \left(\frac{w-1}{2}\right)_3 \delta_2\right)\right]$$

die hier vorkommenden Grössen

$$w_1 \; u_1; \; d_1 \; d_2 \text{ und } U_1 \; \delta_1 \; \delta_2$$

sind gegeben; nur

$$d_1 \text{ und } \delta_1, \text{ dann } d_2 \text{ und } \delta_2$$

stehen in dem Verhältnisse

$$1 : w^2 \text{ und } U_1 = \left(\frac{w-1}{2}\right) w^2.$$

Die übrigen Summen werden durch Hinzufügung der oben erwähnten Differenzen gebildet.

Die Summen der verticalen Reihen bildet man, indem man bei a im zweiten Theile der Gleichung die Summe der Differenzen addirt. Mithin

$$a_1 = \frac{1}{w}\left[\left(\binom{w^2}{1}u_1 + \binom{w^2}{2}d_1 + \binom{w^2}{3}d_2\right) + \left(\left(\frac{w-1}{2}\right)_1 U_1 + \left(\frac{w-1}{2}\right)\delta_1 + \left(\frac{w-1}{2}\right)_3 \delta_2\right)\right]$$

Die übrigen Summen erhält man durch Abziehen der früheren Differenzen. Auf diese Weise bekommt man für das Tetragramm aus der Wurzel 5

$$a = 535; \quad a + \left(\frac{w-1}{2}\right) w^2 = 585; \text{ etc.}$$

$$a_1 = 635; \quad a_1 - \left(\frac{w-1}{2}\right) w^2 = 585; \text{ etc.}$$

Für das Tetragramm aus der Zahl 7

a . . . 2779, 2926, 3024, . . .

a_1 . . . 3171, 3024, 2926, . . .

Trägt man Reihen zweiter Ordnung in ein Tetragramm aus gerad-gerader Wurzel ein, so bieten je zwei dadurch entstehende Reihen gleiche Summen dar; im Ganzen aber steigen sie wie die aus ungerader Wurzel in einer Reihe zweiter Ordnung auf, und zwar die der Horizontalreihen mit der Differenz von w^3, die der Verticalreihen mit der Differenz von w. Um nun die einzelnen Summen zu bestimmen, geht man wie bei den Tetragrammen aus ungerader Wurzel von der Summenformel der Reihen zweiter Ordnung aus:

$$S = \binom{n}{1}U_1 + \binom{n}{2}d_1 + \binom{n}{3}d_2$$

und da hier $n = w^2$ ist, so ist

$$S = \binom{w^2}{1}U_1 + \binom{w^2}{2}d_1 + \binom{w^2}{3}d_2$$

als die Totalsumme aller in einem solchen Tetragramme enthaltenen Zahlen.

Da die Totalsumme aus w Summen besteht, von denen je $\frac{w}{2}$ eine Reihe zweiter Ordnung, mit der Differenz von w^3 oder w ergeben und je zwei einander gleich sind, so ist a, als die Summe der mittelsten Horizontalreihe, da es um w^3, $3w^3$, $6w^3$, etc. aufsteigt,

$$a = \left[\left(\binom{w^2}{1}u_1 + \binom{w^2}{2}d_1 + \binom{w^2}{3}\right)d_2 - 2\left(\binom{\frac{w-2}{2}}{1}U_1 + \binom{\frac{w-2}{2}}{2}\delta_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \binom{\frac{w-2}{2}}{3}\delta_2\right)\right]$$

Dies gilt auch als Summenformel für die mittelste Verticalreihe, nur mit dem Unterschiede, dass bei den horizontalen $\delta = w^3$, bei den verticalen $\delta = w$ ist. Auch hier verhalten sich

$$d_1 \text{ und } \delta_1;\ d_2 \text{ und } \delta_2$$

nur so wie

$$1 : w^2 \text{ oder } 1 : w, \text{ und } 2 : w^2 \text{ oder } 2 : w;$$

$$U = \left(\frac{w-2}{2}\right)w^2 \text{ oder } U = \left(\frac{w-2}{2}\right)w;$$

das erstere für die Summe der Horizontalreihen, das letztere für die der Verticalreihen. Auf diese Art erhält man die Summe für das Quadrat aus der Zahl 8:

Horizontalreihen:

$$4440 \underbrace{\quad , \quad}_{512} 4952 \underbrace{\quad , \quad}_{2.512} 5976$$

Verticalreihen:

$$5700 \underbrace{\quad , \quad}_{8} 5708 \underbrace{\quad , \quad}_{2.8} 5724$$

Die Aufsteigung der einzelnen Glieder in den verschiedenen Tetragrammen ergibt sich gerade so, wie bei den ungeraden Tetragrammen. Nehmen wir z. B. das Feld, wohin w in den gewöhnlichen Tetragrammen zu stehen kommt, so ergeben sich für diese Tetragramme U_w als Werthe, die sich ändern, wenn w sich ändert; da aber bei den gerad-geraden w in einer Reihe mit der Differenz von 4 aufsteigt, so ergeben sich die Werthe

$$U_4, \quad U_8, \quad U_{12}, \quad U_{16}, \quad \text{etc.}$$

einer Reihe zweiter Ordnung; z. B. bei den Triangularzahlen:

10, 36, 66, 136, 210, etc.

Die Totalsummen zweier Tetragramme von gleichen Differenzen verhalten sich

$$S : S_1 = n\,(n^2 - 1) : n_1(n_1{}^2 - 1)$$

d. h. sie ergeben Reihen der sechsten Ordnung, da $n = w^2$ ist.

Aus den Quadraten der geraden Zahlen.

4.

10	105	120	**1**	236
49	**28**	**21**	78	172
15	**66**	**55**	36	172
136	3	6	**91**	236
224	206	206	202	202	184

8.

36	1711	1953	10	15	1770	2016	**1**	7512
45	**120**	1326	1431	1378	1485	**55**	136	5976
1176	171	**253**	990	1035	**190**	276	361	4952
325	780	630	**435**	**406**	741	595	528	4440
561	496	378	**703**	**666**	465	351	820	4440
300	903	**1081**	210	231	**946**	1128	153	4952
1225	**1540**	66	91	78	105	**1275**	1596	5976
2080	3	21	1830	1891	6	28	**1653**	7512
6056	5748	5724	5708	5700	5700	5708	5724	5748	5384

Modificirte Tetragramme

mit eingetragenen Reihen zweiter Ordnung von der Differenz 2.

Aus den Quadraten der Zahlen 3 und 4.

3.

16	81	**4**	101
9	**25**	49	83
64	1	**36**	101
93	89	107	89	77

4.

16	196	225	**1**	438
81	**49**	**36**	144	310
25	**121**	**100**	64	310
256	4	9	**169**	438
414	378	370	370	378	334

Zweite Art.

Die zweite mir bekannte Modification der Tetragramme bezieht sich nur auf magische Quadrate mit ungerader Seitenzahl. Sie besteht darin, dass die Zahlen in den beiden Haupt-Diagonalen, im oberen (horizontalen) und rechten (verticalen) Randstreifen unverändert stehen bleiben, die übrigen Streifen aber in den Werthbestimmungen ihrer Felder eine Abänderung erleiden.

Die Tetragramme aus ungerader Wurzel haben nämlich, wie wir gesehen haben, das Eigenthümliche, dass die wagrechten und senkrechten Randstreifen, welche gleichsam den Rahmen des Tetragrammes bilden, zwei arithmetische Reihen mit unterschiedenen Differenzen enthalten. Denkt man sich nun aus einem solchen Tetragramme alle Zahlen entfernt, mit Ausnahme der in den beiden Haupt-Diagonalen, dann der im oberen und der im rechten Randstreifen befindlichen, und besetzt man von den stehen gebliebenen Zahlen ausgehend die leer gewordenen Felder in der Richtung von rechts nach links und von oben nach unten mit den alternirenden Gliedern zweier arithmetischer Progressionen von derselben Ordnung und Differenz, wie sie in den beiden Randstreifen vorkommen, nämlich $w-1$ für die horizontale und $w+1$ für die verticale Richtung: so ist es eine nothwendige Folge der tetragrammatischen Wesenheit, dass die auf solche Weise modificirten Tetragrammzahlen in dieser Art ermöglicht worden sind, und in ganz neuen Relationen zu einander stehen, somit zu neuen Resultaten ein reichhaltiges Substrat liefern. *(Tab. II, IV, VII, XI, XVI, XX, XXIV, XXVIII, Nr. 13, 20, 26, 32, 38, 42, 46, 50.*

Dahin gehört besonders die Thatsache, dass die einzelnen Streifen eines solchen Tetragrammes nicht mehr gleiche Summen ergeben, sondern dass diese Summen nach *Tafel XL, Nr. 62* sowohl aus den wagrechten, als den senkrechten Streifen bestimmte arithmetische Progressionen bilden. Die Formel für die Summen aus dem ungeänderten oberen (wagrechten) Randstreifen lautet, wie bekannt,

$$S = \frac{w^3 + w}{2}$$

Da nun die Differenz, um welche die Summen der wagrechten Streifen aufsteigen, gleich ist der im rechten untern Eckfelde enthaltenen Zahl und diese in der Formel $\frac{w^2 + w}{2}$ ihren Ausdruck findet, so wird die Formelreihe für die Horizontal-

summen lauten:

$$\frac{w^3+w}{2},\quad \frac{w^3+w^2+2w}{2},\quad \frac{w^3+2w^2+3w}{2},\quad \frac{w^3+3w^2+4w}{2},\quad \frac{w^3+4w^2+5w}{2},\quad \ldots,$$

$$w^3-2(w^2+w),\quad w^3-\frac{3}{2}(w^2+w),\quad w^3-(w^2+w),\quad w^3-\frac{w^2+w}{2},$$

$$\frac{w^3+(w-1)w^2+w^2}{2} \quad w^3$$

woraus ersichtlich ist, dass die unterste Horizontalsumme immer den Cubus der Wurzel ergibt.

Wird nun in diesen Formeln nach einander $w = 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$ gesetzt, so erscheinen für die oberen Horizontalstreifen nachstehende Reihen dritter Ordnung mit der Differenz 24; und zwar

1) für den zweit-oberen Streifen die Reihe:

203, 414, 737, 1196, 1815, . . .

2) für den dritt-oberen Streifen die Reihe:

231, 459, 803, 1287, 1935, . . .

3) für den viert-oberen Streifen die Reihe:

259, 504, 869, 1378, 2055, . . .

Die Summen der unten gelegenen Horizontalstreifen bilden arithmetische Reihen 3. Ordnung mit der Differenz 48, und zwar:

1) die Summe des untersten Horizontalstreifens die Reihe:

343, 729, 1331, 2197, 3375, . . .

2) des zweit-untersten Streifens die Reihe:

315, 684, 1265, 2106, 3255, . . .

3) des dritt-untersten Streifens die Reihe:

287, 639, 1199, 2015, 3135, . . .

Die Summen der in der Mitte stehenden Horizontalstreifen ergeben arithmetische Reihen 3. Ordnung mit der Differenz 36, und zwar entsteht

1) aus dem mittelsten Horizontalstreifen die Reihe:

259, 549, 1001, 1651, 2535, . . .

2) aus dem ersten Streifen über dem mittelsten die Reihe:

231, 504, 935, 1560, 2415, . . .

3) aus dem zweiten Streifen über dem mittelsten die Reihe:

203, 459, 869, 1469, 2295, . . .

4) aus dem dritten Streifen über dem mittelsten die Reihe:

175, 414, 803, 1378, 2175, . . .

5) aus dem ersten Streifen unterhalb der Mitte die Reihe:

287, 594, 1067, 1742, 2655, . . .

6) aus dem zweiten Streifen unterhalb der Mitte die Reihe:

315, 639, 1133, 1833, 2775, . . .

7) aus dem vierten Streifen unterhalb der Mitte die Reihe:

343, 684, 1199, 1924, 2895, . . .

Betrachtet man ferner die aus den senkrechten Streifen entstandenen Summen, so sieht man, dass sie zwei arithmetische Progressionen enthalten. Davon sind die Glieder der einen die Summen aus den verticalen Streifen mit ungeradem Index, d. h. aus dem 1. 3. 5. . . . Streifen von rechts nach links; die Glieder der anderen sind die Summen aus den senkrechten Streifen mit geradem Index, also aus dem 2. 4. 6. . . . Streifen von rechts nach links gezählt, weshalb für die verticalen Summenreihen zweierlei Formeln aufgestellt werden müssen.

Die Summenreihe aus den Verticalstreifen mit ungeradem Index beginnt mit der Summe des ungeänderten rechten Randstreifens und steigt mit der Diff. $w^2 - w$ auf. Wir erhalten demnach für sie folgende Formeln:

$$\frac{w^3+w}{2},\quad \frac{w^3+2w^2-w}{2},\quad \frac{w^3+4w^2-3w}{2},\quad \frac{w^3+6w^2-5w}{2},\quad \ldots$$

$$w^3-4w^2+4w,\quad w^3-3w^2+3w,\quad w^3-2w^2+2w,\quad w^3-w^2+w.$$

Für die Summenreihe der Verticalstreifen mit geradem Index, welche ebenfalls mit der Differenz $w^2 - w$ aufsteigt, gelten die Formeln:

$$\frac{w^3+3w^2}{2},\quad \frac{w^3+5w^2-2w}{2},\quad \frac{w^3+7w^2-4w}{2},\quad \frac{w^3+9w^2-6w}{2},\quad \ldots$$

$$w^3-\frac{7w^2-9w}{2},\quad w^3-\frac{5w^2-7w}{2},\quad w^3-\frac{3w^2-5w}{2},\quad w^3-\frac{w^2-3w}{2}$$

Setzt man in diesen Formeln für w die Wurzelwerthe 7, 9, 11, 13,.... so entstehen in den aufsteigenden Tetragrammen für die einzelnen Verticalstreifen arithmetische Reihen 3. Ordnung mit der Differenz 24, und zwar

a) für den zweiten ungeraden Verticalstreifen die Reihe

217, 441, 781, 1261, 1905, . . .

b) für den ersten geraden Streifen die Reihe:

245, 486, 847, 1352, 2025, . . .

c) für den zweiten geraden Streifen die Reihe:

287, 558, 957, 1508, 2235, . . .

Die Totalsumme aller in einem so modificirten Tetragramme enthaltenen Zahlen ist durch die Formel gegeben

$$T\Sigma = \frac{1}{4}(3w^4 + w^2);$$

in Zahlen umgesetzt erhält man aus dieser Formel für die Reihe der ungeraden Tetragramme die Werthe:

1813, 4941, 11011, 21463, 38025, . . .

eine arithmetische Progression 4. Ranges mit der Differenz 288.

Das Gesetz

des menschlichen Wachsthumes.

Da die allgemeine Kenntnissnahme des von mir aufgestellten Gesetzes des menschlichen Wachsthumes nicht vorausgesetzt werden kann, so halte ich es für nothwendig, dasselbe hier sowohl in seinen allgemeinen Bestimmungen, als auch in seiner Erscheinung am Wachsthume der einzelnen Individuen näher auseinanderzusetzen, um seine arithmetisch-geometrischen Theile in ihren verschiedenen Beziehungen zu der Form, dem Wesen und Inhalte der magischen Quadrate zu prüfen und den bestehenden Zusammenhang mit diesen nachweisen zu können. Dabei muss ich aber hervorheben, dass dieser Theil meiner Arbeit nur der erste *Versuch* sein soll, an einer Naturerscheinung nachzuweisen, in wie weit das Alterthum zu der Behauptung berechtigt war, *dass alle Naturgesetze aus den magischen Quadraten abgeleitet und alle Naturerscheinungen auf sie zurückgeführt werden können.*

Allgemeine Bestimmungen des Gesetzes.

1. Die Dauer des menschlichen Wachsthumes beträgt beim Manne 300 Sonnenmonate oder 25 Sonnenjahre, beim Weibe 300 Mondmonate oder 23 Sonnenjahre.

2. Diese ganze Wachsthumsdauer von 300 Monaten ist in 24 Theile — Epochen — abgetheilt. Der erste Monat nach der Geburt bildet die erste Epoche; die nachfolgenden 23 Epochen entstehen so, dass immer die zunächst folgende um einen Monat länger ist, als die unmittelbar vorangegangene; daher ist die zweite Epoche 2, die dritte 3, u. s. w. die vierundzwanzigste Epoche 24 Monate lang.

3. Diese 24 Epochen gruppiren sich in drei Abschnitten der Art, dass der erste Abschnitt die ersten 6 Epochen nach der Geburt, also die Zeit von der Geburt bis zum vollendeten 21. Lebensmonate, der zweite die mittleren 12 Epochen, die Zeit vom 21. bis zum zurückgelegten 171. Monate — $14\frac{1}{4}$ Jahre — und der dritte die letzten 6 Epochen, die Zeit vom 171. bis zum vollendeten 300. Monate in sich schliesst.

Diese drei allgemeinen Bestimmungen bezüglich **der Zeit**, welche der Mensch zu seiner körperlichen Entwickelung braucht, kommen bei jedem Wachsthume der verschiedenen Individuen unabänderlich vor. Die Bestimmung der Grössenzunahme des Körpers oder seiner Theile, welche jeder Epoche und jedem Abschnitte zukommt, ist ausserordentlich einfach. Diese Zunahme ist in jeder Lebensperiode so genau begränzt, dass sie bei ihrer Prüfung in der Natur nicht übersehen oder missdeutet werden kann.

Der ganze menschliche Körper, sowie jeder seiner Theile, wächst in der Weise, dass die Zunahme, die in der ersten Epoche, also im ersten Lebensmonate erfolgt, sich in jeder Epoche des ersten Abschnittes wiederholt. Eben so sind die Wachsthumszunahmen in jeder der 12 mittleren Epochen und auch die in den letzten 6 Epochen einander gleich. Mit anderen Worten, um welche Grösse ein jeder Körpertheil in der ersten Epoche zunimmt, um dieselbe Grösse wächst er in der 2., 3., 4., 5., 6. Epoche. Wie er aber in die 7. Epoche tritt, ändert sich stets diese Wachsthumszunahme, bleibt aber wieder bis zur 18. Epoche dieselbe. Um was endlich ein Körpertheil in der 19. Epoche wächst, um dasselbe wächst er auch in der 20., 21., 22., 23. und 24. Epoche.

Nebst dieser Bestimmung der Wachsthumszunahme für jeden der drei Abschnitte gibt es noch eine andere, die an und für sich wohl weniger wichtig ist, die aber die gesetzlichen Zunahmen in einer Weise markirt, so dass die Allgemeingültigkeit des Gesetzes für das Wachsthum aller organischen Individuen ausser Zweifel gesetzt wird. Es ist nämlich ein wesentliches Merkmal der ersten sechs Epochen eines jeden Wachsthumes, dass in ihnen die Entstehung aller Theile des Organismus beendet wird, und dass ein jeder Körper trotz ihrer auffallend kurzen Dauer während dieser Zeit mehr als die Hälfte seiner ihm zukommenden Grösse erreicht.

12,000 an verschiedenen Obstarten durch drei Jahre sorgfältig angestellte Messungen haben es ausser allen Zweifel gesetzt, dass das Gesetz des menschlichen Wachsthumes in seiner so eben aufgestellten Allgemeinheit auch für die Pflanzenwelt vollkommene Geltung habe. Dasselbe haben die am Rinde und am Pferde gesammelten Daten für diese Thierarten mit gleicher Bestimmtheit nachgewiesen, weshalb der Schluss nahe liegt, dass alles organische Wachsthum diesem Einen Gesetze untergeordnet ist.

Jedes Wachsthum zeigt die Eintheilung seiner Dauer in 300 gleiche Theile mit deren Untereintheilung in 24 Epochen, welche 3 Gruppen bilden. Ueberall sind die Wachsthumszunahmen in jeder Gruppe gleich, nur mit dem Unterschiede, dass die Zeiteinheit, somit die erste Epoche, sowie auch die Grössenzunahme in den Epochen bei verschiedenen Individuen und ihren Theilen eine verschiedene ist. So ist beim Menschen die Zeiteinheit 1 Monat, beim Pferde 1 Woche, beim Rind 4 Tage, bei der Aprikose 6 Stunden, bei der Pfirsich 9 Stunden, bei einer Spielart Winterbirnen, der sogenannten Isenbartbirne, 13 Stunden. Demnach beziffert sich die ganze Wachsthumsdauer beim Pferde mit 300 Wochen = 5 Jahren 40 Wochen, beim Rinde mit 300 × 4 = 1200 Tagen = 3 Jahren 15 Wochen, bei der Aprikose mit 300 × 6 = 1800 Stunden = 75 Tagen, bei der Pfirsich mit 300 × 9 = 2700 Stunden = 112½ Tagen, bei der Isenbartbirn mit 300 × 13 = 3900 Stunden = 162½ Tagen. Um was nämlich das Pferd in seiner ersten Epoche, also in der ersten Lebenswoche, das Rind in den ersten 4 Lebenstagen, die Aprikose in den ersten 6, die Pfirsich in den ersten 9, die Isenbartbirne in den ersten 13 Stunden nach abgefallener Blüte in allen Dimensionen an Grösse zunehmen, um dasselbe wachsen sie in derselben doppelten, dreifachen u. s. w. Zeit, und

die ersten 6 Epochen, in welchen jeder Organismus seine Entstehung beendet und bereits die Hälfte der ihm bestimmten Grösse erreicht hat, betragen beim Menschen 21 Monate, beim Pferde 21 Wochen, beim Rinde 21 × 4 = 84 Tage, bei der Aprikose 21 × 6 Stunden = 126 Stunden = 5 Tage 6 Stunden, bei der Pfirsich 21 × 9 = 189 Stunden = 7 Tage 21 Stunden, bei der Isenbartbirn 21 × 13 = 273 Stunden = 11 Tage 9 Stunden.

So befolgt das Wachsthum aller organischen Wesen, wenn einmal seine Dauer nach dem allgemeinen Gesetze bestimmt ist, in jeder Epoche und in jedem Abschnitte mit mathematischer Präcision dieselbe Regelmässigkeit in der Stufenfolge nach Zeit und Raum, welche am menschlichen Wachsthume unter der Controle der Uhr und des Maasses beobachtet wird. Aus diesen Beobachtungen und den Folgerungen aus ihnen stellt sich die Allgemeinheit des Wachsthumsgesetzes in folgender mathematischen Grundform heraus:

1. Jedes Wachsthum steht unter der Herrschaft der Zahl 300, d. h. überall sind 300 gleiche aufeinanderfolgende Zeiteinheiten nöthig, um das Wachsthum zu vollenden.

2. Diese 300 gleichen Zeiteinheiten gruppiren sich überall in 24 ungleiche Epochen. Ueberall erscheint also die Zahl 24 als die zweite Grundzahl der Zeitbestimmung.

3. Die 24 ungleichen Epochen bilden jedesmal eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Differenz 1, die mit 1 anfängt und mit 300 endet.

4. Die Zahl 3, als der Ausdruck der grossen Abschnitte des Wachsthumes, ist die dritte Grundzahl eines jeden Wachsthumes.

Die Zahlen 300, 24 und 3, die arithmetische Reihe zweiter Ordnung, dann die Zahlen 6 und 21 sind daher der ursprüngliche, unwandelbare, fortbestehende Canon, der in den Tausenden vorangegangener Generationen die gesetzliche Herrschaft über die werdenden organischen Einzelwesen geübt hat. Diese Herrschaft wird so lange bei jenen Zahlen sein, als die Fortpflanzung der organischen Wesen dauern wird, bis sie endlich nach den unerforschlichen Rathschlüssen des Schöpfers die ihnen zugewiesene Bestimmung erreicht haben und jene qualitative Vollendung hergestellt sein wird, welche der Weiterbau des wunderbaren Weltganzen erfordert.

Specielle Bestimmungen des Gesetzes.

Da bei den verschiedenen Theilen des menschlichen Körpers in Bezug auf die in jedem Abschnitte vorkommenden, untereinander gleichen Zunahmen eine oft bedeutende relative Verschiedenheit beobachtet wird, so erscheint es nothwendig, jeden Körpertheil, der eine solche Verschiedenheit in der Zunahme zeigt, näher zu betrachten und die Resultate dieser Betrachtung mit der Wachsthumszunahme des ganzen Körpers zu vergleichen. Zu diesem Zwecke muss es vor Allem bekannt sein, welche Körpertheile in dieser Beziehung ein ungleiches Wachsthum aufweisen; diese müssen wieder so genau begränzt sein, dass ihre Grössenbestimmung in keinem Momente der Untersuchung zweifelhaft wird. Um der letzteren Anforderung zu genügen, ist es am zweckmässigsten, die wichtigsten Abschnitte des menschlichen Skeletes als Grundlage der verschiedenen Körpertheile zu betrachten und vermittelst ihrer Grössenbestimmung die einzelnen Abschnitte und Theile des Körpers genau zu begränzen. Dies wird sich am besten bewerkstelligen lassen, wenn der Körper auf einer festen, wagrechten Unterlage ausgestreckt liegt.

Auf solche Weise zerfällt die Körperlänge in sechs Abschnitte, die durch Knochenpunkte genau von einander geschieden sind.

Diese sechs Theile der Körperlänge sind:

1. Die Kopflänge, vom Scheitel zur Kinnspitze;
2. die Halslänge, von der Kinnspitze zum oberen Rande des Brustbeins;
3. die Länge des Brustbeins, von seinem oberen Rande zum Endpunkte des Schwertknorpels;
4. die Entfernung des Schwertknorpelendes vom oberen Rande der Schambeinverbindung. Diese Entfernung wird vom Nabel halbiert;
5. die Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels, vom oberen Rande der Schambeinverbindung zum Mittelpunkte des inneren Knöchels;
6. die Höhe vom Mittelpunkte des inneren Knöchels zur Sohle.

Ausser diesen sechs Längenbestimmungen hat der menschliche Körper noch vier Breitenbestimmungen, die ebenfalls in ihrer Zunahme während der drei Wachsthums-Abschnitte eine besondere, ihnen eigenthümliche Art des Wachsthumes zeigen. Es sind folgende:

1. Die halbe Schulterbreite, welche durch die Länge des Schlüsselbeins bestimmt wird;

2. die Länge des Oberarmes, vom äussersten Punkte des *Caput humeri* bis zum Mittelpunkte des Ellbogengelenkes;

3. die Länge des Vorderarmes, vom Mittelpunkte des Ellbogengelenkes zum Mittelpunkte des Köpfchens der Armspindel;

4. die Länge der ausgestreckten Hand, von diesem Mittelpunkte zur Spitze des Mittelfingers. Die Messungen dieser Breiten-Dimensionen müssen ebenfalls an den wagrecht ausgestreckten oberen Extremitäten gemacht werden.

Zehn Körpertheile sind es also, die, obschon von demselben Blute ernährt und von demselben Nervencentrum beherrscht, dennoch jeder für sich in verschiedenen Zeiten eine nach dem allgemeinen Gesetze wohl gleichartige und normirte, aber unter einander differente Wachsthumszunahme zeigen. Trotz dieser Ungleichheit jedoch herrscht bei dem Wachsthume dieser zehn Körpertheile in den drei Zeitabschnitten und in jeder Epoche jene staunenswerthe Ordnung und Regelmässigkeit, durch welche sie stets jene relative Grösse erreichen, welche die diesen Zeitmomenten entsprechende ganze Körperlänge als ihre jedesmalige Summe ergibt.

I. Die Körperlänge.

Quetelet, der berühmte Astronom und Director der Sternwarte in Brüssel, hat schon vor vielen Jahren an der Brüsseler Bevölkerung nahezu an 25,000 Messungen der Körperlänge in allen Altersclassen zu dem Zwecke gemacht, um statistische Daten zur richtigen Beurtheilung eines Menschenschlages zu erlangen. Die aus den Messungen gewonnenen Resultate wurden nach dem Alter der gemessenen Individuen so zusammengestellt, dass alle in demselben Lebensjahre stehenden zu einer Gruppe vereinigt uud zur Bildung einer Mittelgrösse verwendet wurden.

Die auf Quetelet's Resultate basirte und von Delemer, Feigniaux, Guiette und van Eph entworfene Tabelle ergibt für die angegebenen Altersstufen die nebenstehenden Werthe.

Alter	Knabe	Mädchen	Differenz
1 Tag	0·500m.	0·490m.	0·010m.
1 Jahr	0·698	0·684	0·014
2 „	0·796	0·780	0·016
3 „	0.867	0·853	0·014
4 „	0·930	0·913	0·017
5 „	0·986	0·978	0·008
6 „	1·045	1·035	0·010
7 „	—	1·091	—
8 „	1·160	1·154	0·006
9 „	1·221	1·205	0·016
10 „	1·280	1.256	0·024
11 „	1·334	1·286	0·048
12 „	1·384	1·340	0·044
13 „	1·431	1·417	0·014
14 „	1·489	1·475	0·014
15 „	1.549	1·496	0·053
16 „	1·600	1·518	0·083
17 „	1·640	1·553	0·087
18 „	—	1·564	—
19 „	1·665	1·570	0·095
20 „	—	1·574	—
Am Ende des Wachsthumes	1·684	1·579	0·105

Quetelet hat nach seinen Daten und Berechnungen das Gesetz für die Bewohner von Brüssel in folgender Art aufgestellt:

1. Am schnellsten geht das Wachsthum unmittelbar nach der Geburt vor sich; in dem Zeitraume von 1 Jahr nimmt das Kind um 2 Decimeter an Grösse zu.

2. Das Wachsthum eines Kindes nimmt in demselben Maasse ab, als es dem 4. oder 5. Lebensjahre näher kommt, demjenigen Zeitraume, in welchem es die meisten Chancen für das Fortleben gewinnt. So beträgt das Wachsthum im

2. Jahre nach der Geburt nur die Hälfte des ersten, im 3. Jahre nur ungefähr $\frac{1}{3}$ desselben.

3. Beim Uebergange vom 4. oder 5. Jahre bis zum 16. d. h. bis zum Eintritte der Pubertät, erfolgt das Wachsthum fast ganz regelmässig, so dass dasselbe jährlich ungefähr $56^{mm.}$ beträgt.

4. Nach den Jahren der Pubertät fährt der Körper fort zu wachsen, jedoch nur langsam, und zwar erfährt er vom 16. zum 17. Jahre eine Zunahme von $4^{Cm.}$, in den darauf folgenden Jahren von $2\frac{1}{2}^{Cm.}$.

5. Das Wachsthum eines Menschen scheint mit dem 25. Jahre noch nicht ganz abgeschlossen zu sein.

Nebstdem waren früher noch etwas genauer bekannt die Durchschnittsgrössen der Körperlänge des erwachsenen Mannes, wie sie bei den Assentirungen zu den verschiedenen Armeen gefunden worden waren und Herr Silbermann, Director des Museum für Kunst und Industrie zu Paris, sie bei seinen Wahrscheinlichkeitsberechnungen zur Constatirung eines allgemeinen Naturmaasses benützt hatte. Aus den von anderen Beobachtern gesammelten Daten schien hervorzugehen, dass der Mittelwerth für die Körperlänge des neugebornen Knaben beiläufig $50^{Cm.}$ betrage, für die erwachsene Körperlänge der europäischen Nationen aber von 162 zu $173^{Cm.}$ variire.

Da ich schon bei meinen ersten Messungen in die günstige Gelegenheit versetzt wurde, ausserordentlich kleine Körper, wie die der sogenannten Azteken und zweier Liliputaner, die längere Zeit in Wien zur Schau ausgestellt waren, einer genauen Beobachtung zu unterziehen; da mir auch andererseits der Zufall die vielleicht grössten jetzt lebenden Exemplare des Riesenwuchses im Irländer Murphy und den beiden Schwestern aus Böhmen zugeführt hatte: so drang sich mir die Ueberzeugung auf, dass die Mittelgrösse des Körpers, insofern man die ganze Menschheit, also das der Natur nach beiden Extremen hin Erreichbare in's Auge fasst, die angegebene Durchschnittszahl weit übertreffe. Wenn ich nämlich die kleinste mir vorgekommene Körperlänge eines Zwerges von $86^{Cm.}$ mit der Körperlänge des Riesen Murphy von $210^{Cm.}$ zusammenstellte, so kam als Durchschnittswerth dieser beiden Extreme die Grösse von 148 $^{Cm.}$ zum Vorschein, also eine Durchschnittszahl, die, obwohl factischen Grössen entnommen, offenbar viel zu klein erscheinen musste, da die meisten Mittelgrössen der europäischen Race eine bedeutend grössere Zahl angeben. Noch klarer wurde mir

aber das Verhalten der häufigsten Körperlängen durch die Beobachtungen an jenen Personen, welche ich in einem Zeitraume von zehn Jahren zu wiederholten Malen zu messen Gelegenheit hatte. Schon in meinem ersten Werke über das Gesetz des menschlichen Wachsthumes, erschienen in Wien 1858 bei Carl Gerold, habe ich die Gründe für die Behauptung geliefert, dass die Natur alle vorkommenden Grössen im geometrischen Verhältnisse zur Geburtsgrösse der bezüglichen Körpertheile fortwachsen lasse. Untersucht man nun, wie die einzelnen Grössen wachsen müssten, wenn sie in der geometrischen Proportion mit der mittleren Körperlänge des Erwachsenen von nur 164$^{Cm.}$ aufsteigen, die doch offenbar von der mittleren Körperlänge des neugeborenen Knaben als Basis ausgeht, so wird man allsogleich finden, dass alle in der Natur vorkommenden Grössen ein viel stärkeres Wachsthum zeigen, als dieses nach jener Proportion der Fall sein würde. Denn wäre das Verhältniss der mittleren neugeborenen Körperlänge zu der erwachsenen 50:164 richtig, so könnte der in Wien vorkommende kleinste Neugeborne von 40$^{Cm.}$ nach beendetem Wachsthume nur die Grösse von 131·2$^{Cm.}$ und der grösste Neugeborene, der 56$^{Cm.}$ misst, blos die Grösse von 183·68$^{Cm.}$ erlangen. Nun weisen aber die bis jetzt gesammelten Messungsresultate nach, dass die vorkommende kleinste Körperlänge des erwachsenen Mannes 140$^{Cm.}$ misst, während andererseits die Fälle gar nicht selten sind, wo diese Körperlänge 187 bis 192$^{Cm.}$ gross wird. Da ich nun solche sehr grosse Körperlängen schon bei meinen ersten Messungen in grosser Anzahl angetroffen hatte, und zahlreiche Neugeborene es ausser Zweifel gestellt hatten, dass der mittlere Geburtswerth der Körperlänge von 50$^{Cm.}$ nicht zu hoch angegeben ist, so fand ich mich in meinem ersten Werke veranlasst, die mittlere Körperlänge des erwachsenen Mannes mit 180$^{Cm.}$ aufzustellen, erklärte aber schon damals diese Zahl nur als das Resultat einer Wahrscheinlichkeitsberechnung, da sie einer nicht hinreichenden Anzahl von Messungen entnommen, keineswegs auf volle Verlässlichkeit Anspruch machen konnte.

Bald hatten mich auch meine wiederholten Messungen belehrt, dass diese Mittelzahl wirklich zu hoch gegriffen war, da fast jedes zur Beobachtung gekommene stufenweise Wachsthum bedeutend hinter jener Grösse zurückblieb, die es hätte erreichen müssen, wenn die mit 50 und 180$^{Cm.}$ angesetzten Mittelgrössen die richtige Proportion des aufsteigenden Wachsthumes der Körperlänge ausgedrückt hätten. Anfangs war ich wohl geneigt, dieses factische Zurückbleiben

der wachsenden Grössen den vielen ungünstigen Verhältnissen zuzuschreiben, unter denen bei uns das Wachsthum sich meistentheils abwickelt; ich musste aber diese Ansicht als unbegründet aufgeben, da ich fast alle vorkommenden Grössen hinter dieser muthmasslichen Norm zurückbleiben sah, und überdies dieses Zurückbleiben gerade in dem Verhältnisse ihrer relativen Grösse beobachtet wurde.

Auf welche Weise schliesslich die mittlere Körperlänge des Erwachsenen mit 175$^{Cm.}$ festgesetzt wurde, ist in meinem zweiten Werke, wie ich glaube, deutlich genug begründet angegeben. Hier will ich mich nur auf die Angabe beschränken, dass die Grenzen des möglichen Wachsthumes der Körperlänge in dem Verhältnisse 50 : 175 als feststehend zu betrachten sind, und ich werde die weiteren Consequenzen aus diesen Zahlen um so lieber entwickeln, als dieselben wieder in umgekehrter Reihenfolge einen Rückschluss auf die angegebene Mittelgrösse des Neugeborenen zulassen. Denn ausser diesen Zahlenresultaten, die theils fremden Erfahrungen entnommen, theils meiner eigenen Forschung und Messung ihren Ursprung verdanken, haben abermals die an denselben Personen zu verschiedenen Zeiten wiederholten Messungen bewiesen, dass die Wachsthumszunahme der Körperlänge in den ersten 6 Epochen durchschnittlich 41$^{Cm.}$ oder $6^{11}/_{12}$$^{Cm.}$ in jeder Epoche — während des zweiten Abschnittes 72$^{Cm.}$ oder 6$^{Cm.}$ in jeder Epoche — und während des dritten 12$^{Cm.}$ oder 2$^{Cm.}$ in jeder Epoche — betrage. Diese durchschnittlichen Zunahmen geben die Summe von 125$^{Cm.}$ als das gesammte durchschnittliche Wachsthum der Körperlänge von der Geburt bis nach vollendetem Wachsthume, und diese Summe addirt zur mittleren Geburtsgrösse des Neugebornen, ergibt die normale mittlere Körperlänge von 175$^{Cm.}$. Betrachtet man nun die Messungsresultate an Erwachsenen und vergleicht dieselben mit jenen an den Neugebornen, so wird man das Verhältniss der Durchschnittszahlen dieser zwei Epochen so übereinstimmend finden, dass man nicht weiter an der Richtigkeit dieser so aufgestellten Verhältnisse wird zweifeln können.

II. Die einzelnen Körpertheile.

Nachdem auf solche Weise die gesetzliche Wachsthumszunahme der Körperlänge festgestellt worden war, ging ich daran, die Mittelgrössen der zwei

Haupt-Abschnitte der Körperlänge und der einzelnen sie constituirenden Theile zu bestimmen.

Die ganze Körperlänge theilt sich in die Oberlänge d. i. die Länge vom Scheitel zum oberen Rande der Schoossbeinverbindung, und in die Unterlänge d. i. die Entfernung vom oberen Rande der Schoossbeinverbindung zur Sohle. Die Durchschnittszahlen für diese Grössen, wie sie factisch in der Natur vorkommen, wurden auch hier mit dem obigen Verhältnisse der factischen Mittelgrösse der Körperlänge zur prototypen des Menschengeschlechtes in Einklang gebracht.

Die so entstandenen Columnen der Gesetztafeln für diese Grössen zeigen die Oberlänge des neugebornen Knaben mit 30$^{Cm.}$ Sie steigt in ihrem Wachsthume während der ersten 6 Epochen auf 52$^{Cm.}$, ist daher um 22$^{Cm.}$ gewachsen; während der mittleren 12 Epochen erhebt sie sich auf 75$^{Cm.}$, hat also in dieser Zeit um 23$^{Cm.}$ zugenommen; während der letzten 6 Epochen wächst sie noch um 6$^{Cm.}$, erreicht also endlich die Grösse von 81$^{Cm.}$

Die Unterlänge ergab bei der Geburt die mittlere Grösse von 20$^{Cm.}$, sie zeigt zu Ende der 6. Epoche die Grösse von 39$^{Cm.}$, hat daher um 19$^{Cm.}$ zugenommen; nach den 12 mittleren Epochen maass sie nach einer Zunahme von 49$^{Cm.}$, 88$^{Cm.}$; zu Ende des Wachsthumes erreichte sie die Länge von 94$^{Cm.}$, ihre mittlere Zunahme während des letzten Abschnittes betrug daher 6$^{Cm.}$

Jeder von diesen zwei Haupt-Abschnitten der Körperlänge zerfällt aber in mehrere Theile, die sich wieder nach ihren Zunahmen bedeutend von einander unterscheiden. So besteht die Oberlänge aus folgenden 4 Theilen:

a) Der Länge des Kopfes. Ihr Mittelwerth bei der Geburt ist 12$^{Cm.}$; sie wächst im ersten Abschnitte bis zu 18$^{Cm.}$ heran, hat also um 6$^{Cm.}$ zugenommen; während des zweiten Abschnittes erhebt sie sich zur Grösse von 23$^{Cm.}$, erfuhr also eine Zunahme von 5$^{Cm.}$; im letzten Abschnitte wächst sie noch um 1$^{Cm.}$, wird also endlich 24$^{Cm.}$ gross.

b) Die Länge des Halses misst bei der Geburt 1$^{Cm.}$, zu Ende der sechsten Epoche nach einer Zunahme von 4$^{Cm.}$ wird sie 5$^{Cm.}$ gross; in den mittleren 12 Epochen wächst sie zu 7$^{Cm.}$ heran und zu Ende des Wachsthumes zu 9$^{Cm.}$ Die Wachsthumszunahmen beziffern sich also für die zwei letzten Abschnitte mit je 2$^{Cm.}$ Die Halslänge zeigt unter allen Körpertheilen das relativ stärkste Wachsthum, da ihre Geburtsgrösse sich bis zur Vollendung verneunfacht hat.

c) Das Brustbein misst bei der Geburt im Mittel $7^{Cm.}$, es wächst während des ersten Abschnittes um $6^{Cm.}$, wird also zu Ende dieses Zeitraumes $13^{Cm.}$ gross. Im zweiten Abschnitte beträgt die Zunahme $8^{Cm.}$, daher seine Länge $21^{Cm.}$; im letzten Abschnitte gewinnt es noch $1^{Cm.}$, somit beträgt seine endliche Länge $22^{Cm.}$.

d) Die Länge des Bauches, d. h. die Entfernung des Schwertknorpels von der Schoossfuge zeigt bei der Geburt eine mittlere Grösse von $10^{Cm.}$, die in jedem Alter durch den Nabel halbiert wird, was passend durch $5+5$ angedeutet wird. Sie wächst im ersten Abschnitte um $6^{Cm.}$, ist also zu Ende desselben $16^{Cm.}$ gross; im zweiten Abschnitte nimmt sie um $8^{Cm.}$ zu, erreicht daher die Grösse von $24^{Cm.}$; im letzten Abschnitte beträgt ihre Zunahme $2^{Cm.}$, wodurch sie eine vollendete Grösse von $26 = 13 + 13^{Cm.}$ aufweiset.

Die Theile der Unterlänge sind:

a) Die Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels, die mit $9 + 9 = 18^{Cm.}$ im Mittel geboren wird; zu Ende des ersten Abschnittes misst sie $36^{Cm.}$, hat also eine Zunahme von $9 + 9 = 18^{Cm.}$ erfahren; die Zunahme des zweiten Abschnittes beträgt $46^{Cm.}$, daher die ganze Länge $82^{Cm.}$. Während der letzten 6 Epochen gewinnt sie noch $3^{Cm.}$, erreicht also zuletzt die Grösse von $85^{Cm.}$.

b) Die Höhe vom Mittelpunkte des inneren Knöchels zur Sohle beträgt bei der Geburt durchschnittlich $2^{Cm.}$; im ersten Abschnitte nimmt sie um $1^{Cm.}$ zu, ist also $3^{Cm.}$ gross; dazu kommen im zweiten Abschnitte weitere $3^{Cm.}$, die ihr die Grösse von $6^{Cm.}$ verschaffen; endlich wächst sie im letzten Abschnitte abermals um $3^{Cm.}$, was eine Grösse von $9^{Cm.}$ ausmacht.

Betrachtet man nun das Wachsthum dieser Grössen, wie sie sich ziffermässig durch die verschiedenen Stadien ihres Wachsthumes entwickeln, so lassen sich zur Vereinfachung des Gegenstandes vier Reihen von Ziffern aufstellen, welche schon in ihrer mathematischen Form Eigenschaften und Resultate ergeben, die mir geeignet scheinen, nicht allein die formelle Richtigkeit des Productes zu erweisen, sondern die auch zum grössten Theile genügen sollten, die Wahrheit des aufgestellten Gesetzes zu erhärten. Denn wer wird wohl behaupten können, es sei ein blosser Zufall, wenn die den Messungen entnommenen Daten, die durch Combination nur sehr unbedeutend verändert oder wie der Mathematiker sich ausdrückt, corrigirt zu werden nöthig hatten, ein mathematisches Zahlengebäude

ergeben, wie ein schöneres und vollkommneres kaum je aufgestellt wurde! Man wird im Gegentheile zugeben müssen, dass dieses Zahlengebäude wirklich in der Natur besteht, indem es nur aus ihr, also auf dem Wege der Erfahrung, herausgelesen oder gefunden wurde, aber niemals *a priori* construirt oder erfunden werden konnte. Diese Zahlen gruppiren sich auf folgende Art:

	Hals	Kopf	Brustbein	Bauch	Ober- und Unterschenkel	Knöchel-Sohlenhöhe	Summe
Neugeboren	1	12	7	5+5	9+9	2	50
1. Abschn.	5	18	13	8+8	18+18	3	91
2. „	7	23	21	12+12	41+41	6	163
3. „	9	24	22	13+13	$42\frac{1}{2}+42\frac{1}{2}$	9	175

Diese vier Reihen, welche das gegenseitige Verhältniss der wachsenden einzelnen Theile der Körperlänge nach jedem Zeitabschnitte darstellen, charakterisiren sich besonders dadurch, dass sie in ganzen Zahlen ausgedrückt sind und daher jene Einfachheit zeigen, welche schon Pythagoras und Aristoteles als die natürlichen Verhältnisse bei allen Naturerscheinungen bezeichnen und allen jenen Formen zu Grunde liegend erklären, die auf Symmetrie und Harmonie Anspruch machen und das wahrhaft Schöne zur allgemeinen Geltung zu bringen berufen sind.

Prüft man ferner die Zahlen, welche an der Körperlänge des Neugebornen vorkommen, etwas näher, so wird man finden, dass sie sich an der Längenachse seines Körpers auf sehr symmetrische Weise vertheilen. Die Körperlänge des Neugebornen wird nämlich vom Nabel halbiert, indem die Länge des Kopfes, des Halses, des Brustbeins und die halbe Bauchlänge, welche insgesammt oberhalb des Nabels liegen, $12 + 1 + 7 + 5 = 25^{\text{Cm.}}$ betragen, während die zweite Hälfte der Bauchlänge, die Länge des Ober- und Unterschenkels und die Knöchel-Sohlenhöhe, die unterhalb des Nabels liegen, $5 + 18 + 2$, also ebenfalls $25^{\text{Cm.}}$ messen. Wir sehen ferner die Kopflänge gleich dem Abstande des oberen Brustbeinrandes vom Nabel, die Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels gleich der Entfernung der Kinnspitze von der Schoossfuge, dann die Stirn-Scheitelhöhe mit $7^{\text{Cm.}}$ gleich der Länge des Brustbeines, die Unterlänge mit $20^{\text{Cm.}}$ gleich der Höhe vom Scheitel zur untersten Spitze des Schwertknorpels, so dass die beiden Körperabschnitte ober- und unterhalb der Bauchlänge einander gleich sind, endlich die Länge des Halses mit $1^{\text{Cm.}}$ gleich der mittleren Breite einer Rippe.

Die Wichtigkeit der letztgenannten Grösse erheischt eine besondere Erörterung. Die diagonale Länge des Brustkorbes, vom oberen Rande des Brustbeines zur tiefsten Wölbung der letzten falschen Rippe gemessen, ist gleich dem Segmente der Wirbelsäule zwischen dem oberen Rande des Brustbeins und dem Nabel. Dieses Segment misst ebenso wie jene Länge 12$^{Cm.}$ Da nun der Thorax zu beiden Seiten 12 Rippen hat, so hat eine dieser Rippen die durchschnittliche Breite von 1$^{Cm.}$, ist also der Länge des Kehlkopfes gleich. Alle Zahlen des Gesetzes bedeuten aber Centimeter; wenn nun Ein Centimeter die mittlere Breite einer Rippe ausmacht, so kann man diese oder den zwölften Theil der Brustkorblänge als jene Maasseinheit betrachten, mit welcher nicht nur alle Körpertheile am bequemsten gemessen werden können, sondern die auch die zweckmässigste sein wird, weil die durch dieses Maass gewonnenen Grössen in den vier wichtigsten Altersstufen durchgehends in ganzen Zahlen ausgedrückt erscheinen. Deshalb kann man dieses Maass als das eigentliche Naturmaass des menschlichen Körpers bezeichnen.

Diese dem Körper des Menschen selbst entnommene Maasseinheit ist aber nicht eine rein ideale d. h. nur im gegenseitigen Grössenverhältnisse der einzelnen Körpertheile gedachte; sie ist vielmehr die factische, in jedem Falle zu verwendende Maasseinheit, weil der ganze Körper und alle seine Theile sich durch das ganze Wachsthum im geometrischen Verhältnisse zu den gesetzlichen Geburtszahlen entwickeln. Da nun dies auch von der Rippenbreite des neugebornen Knaben gilt, so gibt eben die Geburtsgrösse derselben die Maasseinheit ab und zwar die natürliche, einfachste und zweckmässigste, welche in jedem Momente des Wachsthumes zur Bestimmung der erreichbaren absoluten Grösse verwendet werden kann. Durch diese merkwürdige Thatsache wäre der Wunsch und die Anforderung der Physiologie und Anatomie, so wie der bildenden Kunst erfüllt, welche seit Polyklet und Vitruvius in irgend einem Theile des menschlichen Körpers das sogenannte Naturmaass gesucht haben.

Wie man aus den aufgestellten vier Reihen der sechs Theile der Körperlänge ferner ersieht, steigt jeder Körpertheil in jedem Abschnitte in einer eigenthümlichen arithmetischen Progression von 6, 12 und wieder 6 Gliedern im stufenweisen Wachsthume auf. Man sieht demnach bei jedem Körpertheil 3, also bei allen sechs Theilen 18 arithmetische Progressionen entstehen, die so unter einander und neben einander verlaufen, dass die Summen aller Theile in jedem

Momente des Wachsthumes Progressionen ergeben, die aus dem allgemeinen Gesetze in eben der Weise gebildet erscheinen, wie es bei jedem einzelnen Theile beobachtet wurde. Diese präcise mathematische Form, in der das Wachsthum der einzelnen Körpertheile vor sich geht, ist gewiss ein Beweis der formellen Richtigkeit des Gesetzes, die eine weitere Bestättigung erfährt, wenn man noch die vier Breiten-Dimensionen des menschlichen Körpers, wie sie in den Gesetztafeln verzeichnet sind, einer gleichen Betrachtung und Prüfung unterzieht.

Die Grössen der vier Breiten-Dimensionen ergeben in den drei Abschnitten des Wachsthumes nachstehende Reihen:

	Entfernung der Mittellinie des Körpers vom Kopfe des Oberarmes	Länge des Oberarmes	Länge des Vorderarmes	Länge der Hand	Summe
Neugeboren	3	9	7	6	25
1. Abschn.	$5\frac{6}{12}$	$16\frac{6}{12}$	$12\frac{9}{12}$	$10\frac{9}{12}$	$45\frac{1}{2}$
2. „	10	$29\frac{6}{12}$	$22\frac{6}{12}$	$19\frac{6}{12}$	$81\frac{1}{2}$
3. „	$10\frac{6}{12}$	$31\frac{6}{12}$	$24\frac{6}{12}$	21	$87\frac{1}{2}$

Da diese Grössen auf der andern Seite des Körpers sich wiederholen, so ergeben sie mit einander fast überall wieder ganze Zahlen — mit Ausnahme des Vorderarmes und der Hand, bei welchen am Ende des 21. Monates der Bruchtheil $\frac{1}{2}$ erscheint — sie stehen daher wieder in demselben einfachen Verhältnisse zu einander und zum Ganzen, welches an den einzelnen Theilen der Körperlänge beobachtet wurde. Auch hier steigen alle Grössen in drei ihnen eigenthümlichen Progressionen auf und bilden ebenfalls, trotz ihres in den einzelnen Zeitabschnitten verschiedenen Wachsthumes, in jedem Moment eine Summe, welche der gesetzlich aufsteigenden halben Körperlänge gleichkommt, indem ja die wagrecht ausgestreckten Arme und Hände in jedem Lebensalter die ganze Körperlänge ergeben.

Man sieht also wieder vier Grössen, von denen eine jede für sich von den andern bei der Geburt differirt und in jedem Haupt-Abschnitte eine eigene Wachsthumszunahme zeigt, so im Wachsthume vorschreiten, dass sie fortwährend von jener Zahl beherrscht werden, welche das Ganze bezeichnend zugleich die Probe der formellen Richtigkeit des Wachsthumes der einzelnen Theile enthält. Nun ist aber diese Summe gleich der halben Körperlänge, die Körperlänge ist wieder die Beherrscherin des Wachsthumes ihrer sechs Theile, folglich ist sie auch der Regulator dieser vier Breiten-Dimensionen. Man sieht auf solche Weise

10 Körpertheile in 30 arithmetischen Progressionen so wachsen, dass sie trotz der grössten Verschiedenheit ihrer Grössen und Zunahmen in ihrem Endresultate immer eine Zifferreihe ergeben, welche den Bestimmungen des allgemeinen Gesetzes eben so entspricht, wie die Zifferreihen der einzelnen Theile.

Wie aus dem Gesagten erhellt, besitzt das arithmetische Gebäude des Gesetzes eine so feste Gliederung und seine Zahlen stehen in einem so innigen Zusammenhange, dass es nicht möglich ist, an irgend einer Zahl für sich eine Aenderung zu treffen, die durch eine Correction der übrigen Zahlen paralysirt werden könnte, ohne augenblicklich das ganze Gebäude zu zerstören; denn wäre man der Meinung, dass das Wachsthum irgend eines Körpertheiles in der Natur vielleicht anders erfolge, so würde die geschehene Abänderung das normirte Wachsthum aller übrigen Theile unmöglich machen, weshalb die im Gesetze enthaltene Ordnung des Wachsthumes aller Theile nur so und nicht anders bestehen kann.

Geometrische Form des Gesetzes.

Der wunderbare Bau des menschlichen Körpers wird durch sieben Grössen desselben mittelst des Maassstabes und des Zirkels bis in die kleinsten Dimensionen eben so leicht und sicher aufgeführt, wie jedes andere Gebäude entworfen und vollendet werden kann. Diese Theile, unter deren Herrschaft und Leitung der ganze Bau steht, sind die oben angegebenen sechs Theile der Körperlänge und das Schlüsselbein. Vermittelst dieser Grössen, der durch ihre Endpunkte gezogenen wagrechten Linien und gewisser, mit ihren Längen als Halbmessern beschriebener Kreise vermag man alle Körpertheile nach den ihnen zukommenden Dimensionsverhältnissen zu construiren und zwar auf folgende Weise:

1. Auf eine senkrechte, die Achse des Körpers vorstellende Linie trägt man von unten nach oben die Grössen der einzelnen Theile der Körperlänge, wie sie in den Gesetztafeln gegeben sind, nach einem beliebigen Maassstabe in der Ordnung auf, in welcher sie am Körper übereinander liegen, und setzt an ihre Endpunkte Buchstaben. So möge *Tafel LVI Nr. 80* hi die Knöchel-Sohlenhöhe, fh die Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels, df die Länge des Bauches, cd die Länge des Brustbeines, bc die Länge des Halses und ab die Länge des Kopfes bezeichnen.

2. Durch diese Endpunkte zieht man wagrechte Linien und theilt die Räume zwischen df und fh in zwei gleiche Theile, $de = ef$, $fg = gh$.

3. Nun beschreibt man aus dem Punkte *e*, welcher die Stelle des Nabels angibt, mit dem Halbmesser *de* den ersten Kreis — den Nabelkreis.

4. Aus dem Punkte *c* wird mit dem Halbmesser *cu*, welcher gleich ist der halben Schulterbreite und durch die Länge des Schlüsselbeines bestimmt wird, der zweite Kreis beschrieben.

5. Ein dritter Kreis wird mit demselben *Radius* $cu = fr = fs$ aus *f* gezogen, welcher die grösste Hüftenbreite beim männlichen Geschlechte bestimmt und daher der Hüftenkreis heisst.

6. Ein vierter Kreis entsteht aus dem Punkte *c* mit der halben Körperlänge als *Radius*.

7. Der Halbierungspunkt der Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels *g* ist das Centrum eines fünften Kreises — des Knickreises; sein *Radius* ist die Hälfte dieser Gesammtlänge, somit ist der Oberschenkel dem Unterschenkel an Länge gleich.

8. Hierauf beschreibt man aus dem Endpunkte *q* des wagrechten, durch den Nabel gehenden Durchmessers mit dem Halbmesser *qc* einen Kreis und bezeichnet mit *k* den Punkt, in welchem dieser Kreis den mit der halben Schulterbreite aus *c* beschriebenen trifft. Es ist dies jener Punkt, auf welchen die Schulterhöhe fällt, wenn der Arm am Körper senkrecht herabhängt.

9. Nun construirt man mit der Seite *ck* als Basis ein gleichseitiges Dreieck, dessen Spitze *α* den Punkt markirt, in welchen die Brustwarze zu liegen kommt. Dasselbe Verfahren auf der zweiten Körperhälfte gibt auch die Lage der zweiten Brustwarze an.

10. Die Länge des Schlüsselbeines, aufgetragen auf die durch *c* gehende wagrechte *cm* vom Endpunkte *m* gegen *c* hin, ergibt die Länge der ausgestreckten Hand *mn*.

11. Diese Länge, um ihr Sechstel vermehrt, von *n* nach *l* aufgetragen, gibt die Länge des Vorderarmes *nl*.

12. An den Vorderarm reiht sich der Oberarm *lx* an, dessen Länge der Handlänge mehr ihrer Hälfte gleich ist.

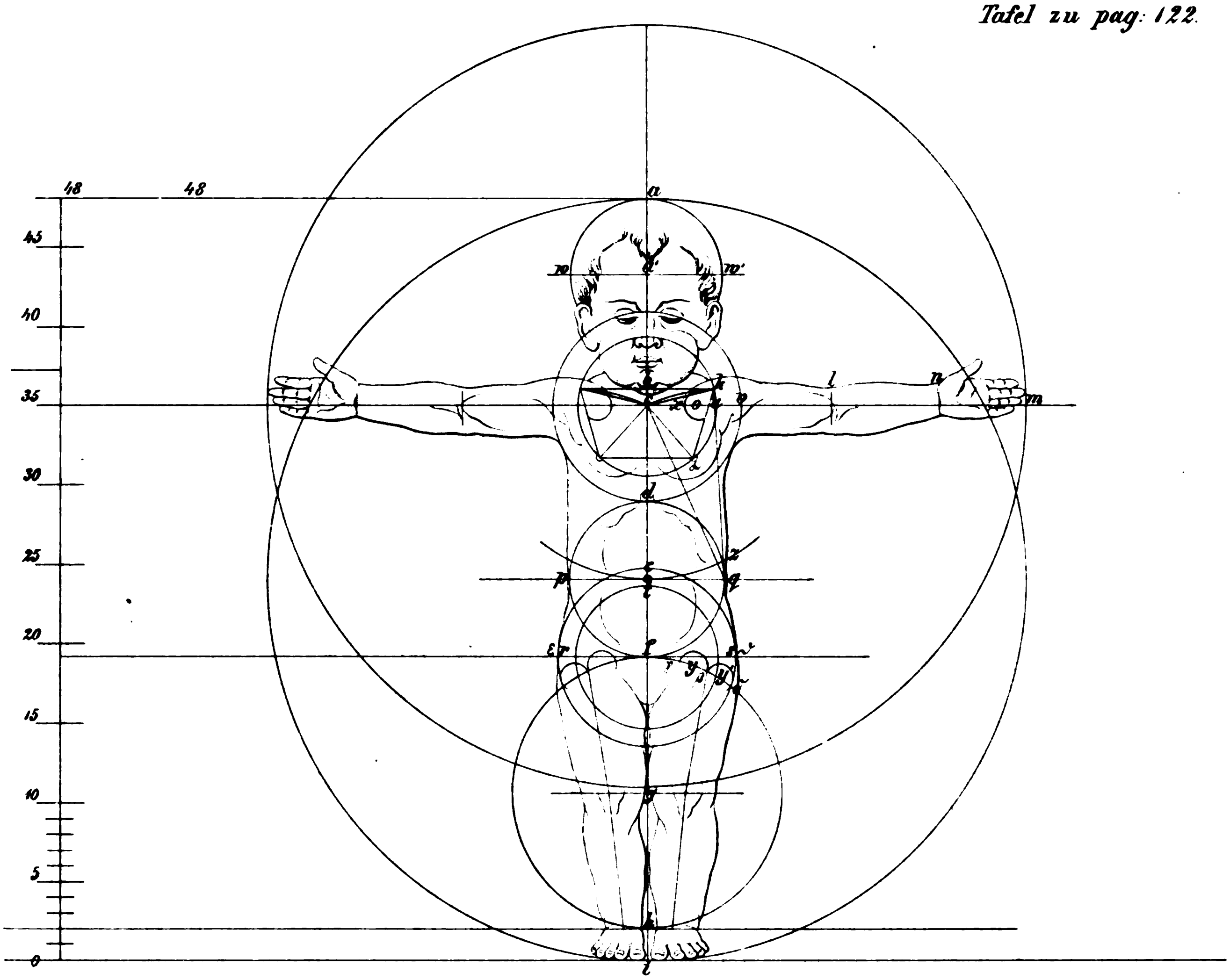
13. Um das Schultergelenk zu bestimmen, trägt man die Schulterhöhe *ku* aus dem Endpunkte *x* des Oberarmbeines auf die wagrechte *cm* auf, und beschreibt mit der so gebildeten *ox* einen Kreis. Das Segment, welches *x* berührt, ergibt Grösse und Lage des Kopfes des Oberarmbeines.

14. Der aus dem Punkte c mit dem Halbmesser ce beschriebene Kreis bezeichnet im Punkte z, wo er den Nabelkreis durchschneidet, die Taille und zugleich die Länge des Brustkorbes.

15. Das männliche Hüftgelenk wird auf folgende Weise gebildet: Trägt man den Halbmesser des Schultergelenkes $ku = ox$ von dem Punkte δ, in welchem der Hüftenkreis vom Kniekreise durchschnitten wird, auf den letzteren gegen die Mittellinie des Körpers hin auf, so ist y' der Mittelpunkt eines mit $ku = ox = y'\delta$ beschriebenen Kreises, der die äusserste Wölbung des Rollhügels umspannt. Trägt man ferner denselben Halbmesser $y'\delta$ aus dem Punkte β so auf, dass sein Endpunkt in die durch den oberen Rand der Schoossfuge verlaufende wagrechte Linie rs fällt, so erhält man den Mittelpunkt y eines Kreises, der mit dem Halbmesser $y\beta = y\gamma = y'\delta = y'\beta$ beschrieben, den Umfang des Kopfes des Oberschenkelbeines bezeichnet.

Das weibliche Hüftgelenk wird zwar eben so gebildet wie das männliche, weicht aber in Bezug auf die Lage und Entfernung von der Körperachse vom männlichen Hüftgelenke theilweise ab. Man zieht nämlich mit dem Halbmesser ku den ersten Kreis gleich aus dem Durchschnittspunkte des Hüften- und des Kniekreises y', trägt hierauf aus dem Endpunkte β dieses Halbmessers $\beta y'$, welcher im Kniekreise liegt, eben diesen Halbmesser gegen die Mittellinie des Körpers hin auf den Kniekreis auf, und beschreibt aus dem Endpunkte y des Halbmessers $y\beta = y\gamma$ den zweiten Kreis, der zur Bildung des Kopfes des Oberschenkelbeines nöthig ist. Ein dritter Kreis aus dem Punkte f mit dem Halbmesser $f\delta = f\vartheta$ beschrieben, der die beiden äusseren, die Grösse der Rollhügel bezeichnenden Kreise umspannt, dient endlich zur Bestimmung der grössten Hüftenbreite des weiblichen Körpers, des weiblichen Hüftenkreises. Diese Construction ergibt nun genau alle jene Eigenthümlichkeiten, wodurch sich das weibliche Hüftgelenk und Becken vom männlichen unterscheidet. Sie zeigt für das weibliche Geschlecht einen grösseren Abstand der Gelenkköpfe der Oberschenkelbeine von einander, deren tieferen Stand im Vergleich mit dem männlichen Hüftgelenke und endlich jene Abweichung in Stellung und Richtung beider Schenkelknochen zu einander, wie sie am weiblichen Skelete beobachtet wird.

16. Um die wichtigsten Bestimmungen für die Bildung des Kopfes zu gewinnen, trägt man den halben Querdurchmesser des Kopfes aus der Gesetztafel



Die Neugeborne.

Kopflänge	ab =	12	*Der quere Kopfdurchmesser*	ww' =	$9\frac{6}{12}$
Hals „	bc =	1	„ *gerade d° d°*		
Brustbein	cd =	6	*Länge der Hand-Länge des Schlüsselbeines*	nm =	$5\frac{6}{12}$
Vom Schwertknorpel zur Schoossfuge	df =	10	*Länge des Vorderarmes*	ln =	7
Von der Schoossfuge zum Mittelpunkte			*d°* „ *Oberarmes*	xl =	9
des Knöchels	fg + gh =	17	*Von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe*		
Von der Mitte des Knöchels zur Sohle	hi =	2	*des Oberarmbeines*	cx =	$2\frac{6}{12}$
Die ganze Körperlänge	ai =	48	*Die halbe Körperlänge*	at =	24

vom Scheitelpunkte aus auf die Achse des Körpers auf und beschreibt aus seinem Endpunkte a' einen Halbkreis, der genau die Wölbung des Schädeldaches begränzt.

Die Eintheilung des Längendurchmessers des Kopfes ab in seine Schädel- und Gesichtstheile lässt sich beim Neugebornen und Erwachsenen auf sehr einfache und verlässliche Weise bewerkstelligen, wenn man aus dem Punkte c des oberen Brustbeinrandes mit der Brustbeinlänge cd als Halbmesser einen Kreis beschreibt. Wo dieser Kreis die Längenachse des Körpers nach oben durchschneidet, da ist der Punkt gegeben, in welchen die Nasenwurzel oder die wagrechte Linie fällt, welche durch beide Augenlidspalten verläuft.

17. Die Länge des Fusses wird in jedem Alter durch die Länge der Hand bestimmt, indem letztere um ihr Sechstel vergrössert, die jedesmalige Länge des Fusses ausmacht. Beim männlichen Geschlechte ist daher der Fuss gleich dem Vorderarme, beim Weibe hingegen ist der Fuss etwas kürzer als der Vorderarm.

Wie diese Haupt-Abschnitte des Körpers, auf dieselbe Weise lassen sich alle übrigen Grössen, selbst der untergeordnetsten Theile, construiren.

Die Construction der weiblichen Gestalt.

Der Bau des weiblichen Körpers entsteht nach demselben Systeme von Linien und Kreisen, welches bei der Construction des männlichen Körpers Geltung hat; doch finden dabei einige Abänderungen statt, aus welchen der weibliche Typus hervorgeht. Einer Abweichung wurde schon Erwähnung gethan, nämlich der Bildung des weiblichen Hüftgelenkes; wichtiger jedoch ist jene Modification am arithmetischen Theile des Gesetzes, welche der gesammten körperlichen Verschiedenheit des Weibes zum Grunde liegt.

Vermindert man nämlich die Länge des Brustbeines um eine Rippenbreite d. h. um $1^{\text{Cm.}}$, so hat man bereits dadurch jene Modification in dem ganzen mathematischen Gebäude des Gesetzes bewirkt, welche zur Umwandlung des männlichen Körperbaues in den weiblichen erforderlich ist. Da bei den Neugebornen beider Geschlechter der Nabel die Körperlänge halbiert, so steht der ganze Körper des Neugeborenen mit Scheitel und Sohle in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Nabel ist. Diese in der Natur constatirte Thatsache ergibt von selbst an gewissen Theilen jene Verkürzung, die nothwendig erfolgen muss, wenn ein Theil auf eine bestimmte Weise verkürzt wird. Denn, wenn am Brustbein des Knaben, also an dem einen Radius eine Verkürzung um $1^{\text{Cm.}}$ vorgenommen

wird, so muss nothwendig der entgegengesetzte Halbmesser ebenfalls um 1^{Cm} kleiner werden und zwar in derselben Entfernung vom Mittelpunkte. Denkt man sich nun diese Verkürzung am unteren freien Ende des Brustbeines geschehen, so muss man sich mit geometrischer Consequenz dieselbe Verkürzung am Becken und am Oberschenkel und zwar am oberen Rande der Schoosbeinverbindung denken, der vom Nabel ebenso weit entfernt ist als das untere Ende des Brustbeines.

Da aber auch beim weiblichen Körper Ober- und Unterschenkel einander gleich sind, so müsste die Verkürzung um $1^{Cm.}$ an der Gesammtlänge dieser zwei Theile, die beim Knaben $18^{Cm.}$ messen, vorgenommen werden; also betrüge diese Grösse beim neugeborenen Mädchen nur $17^{Cm.}$ Und in der That zeigen die zahlreichen an neugeborenen Mädchen angestellten Messungen, dass die Gesammtlänge ihres Ober- und Unterschenkels durchschnittlich um $1^{Cm.}$ kürzer ist als die der Knaben, sowie es jedem Physiologen bekannt ist, dass der kürzere Brustkorb, das kürzere Becken und die kürzeren Schenkel zu den wesentlichen Merkmalen des weiblichen Körperbaues gehören. Desgleichen sind beim weiblichen Geschlechte in jedem Alter auch die wagrecht ausgestreckten Arme und Hände gleich der ganzen Körperlänge, und die weibliche Schulterbreite und Handlänge kleiner als die des Mannes. Wurde also die ganze Körperlänge um $2^{Cm.}$ gekürzt, so muss dasselbe auch mit den oberen Extremitäten geschehen sein.

Um nun jene Theile am weiblichen Körper zu entdecken, welche um jene Grösse verkürzt erscheinen, wurden wieder die gemachten Messungen dieser Theile zu Rathe gezogen. Hier ergab sich die merkwürdige Thatsache, dass die Durchschnittsgrössen des Ober- und des Vorderarmes bei beiden Geschlechtern sich ganz gleich erwiesen und nur die Schulterbreiten und Handlängen beim weiblichen Geschlechte kleiner waren als beim männlichen. Es entfällt daher auf je eine Hand und auf je eine halbe Schulterbreite eine durchschnittliche Verkürzung von $\frac{1}{2}^{Cm.}$. Da aber die Fusslänge beim weiblichen Geschlechte sowie beim männlichen um ein Sechstel grösser ist als die Hand, so ist der weibliche Fuss ebenfalls um den Antheil dieser Verkürzung kleiner als der männliche.

Von der Grösse der Schulterbreite hängt wieder die Breite des Kopfes ab; somit wird die ursprüngliche Verkürzung des Brustkorbes um eine Rippenbreite auch auf diese Grössenbestimmung Einfluss nehmend den ganzen Bau und zwar in allen jenen Theilen umgestaltet haben, an welchen wir eine Abweichung der Dimensionsverhältnisse gegen jene des männlichen Körpers beobachten. Diese

Abänderung wird klar ersichtlich, wenn man die Hauptgrössen des weiblichen Körpers in dieselben Reihen zusammenstellt, wie dies mit den Grössen des männlichen Körpers geschehen ist.

	Länge des Halses	Länge des Kopfes	Länge des Brustbeines	Länge des Bauches	Länge des Ober- und Unterschenkels	Knöchel-Sohlenhöhe	Summe
Neugeboren	1	12	6	5+5	$8\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}$	2	48
1. Abschn.	5	18	12	8+8	$17\frac{1}{2}+17\frac{1}{2}$	3	89
2. „	7	23	20	12+12	$40\frac{1}{2}+40\frac{1}{2}$	6	161
3. „	9	24	21	13+13	42 + 42	9	173

	Von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmes	Länge des Oberarmes	Länge des Vorderarmes	Länge der Hand	Summe
Neugeboren	$2\frac{1}{2}$	9	7	$5\frac{1}{2}$	24
1. Abschn.	5	$16\frac{1}{2}$	$12\frac{9}{12}$	$10\frac{3}{12}$	$44\frac{1}{2}$
2. „	$9\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	19	$80\frac{1}{2}$
3. „	10	$31\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$

Auch an diesen Reihen sieht man die merkwürdige Erscheinung, dass die darin aufgestellten Grössen in sehr einfachen d. h. durch ganze Zahlen ausgedrückten Verhältnissen stehen. Der weibliche Körperbau steht daher unter demselben Gesetze wie der männliche, und ist diesem gleichsam als seinem Vorbilde entnommen.

Zu den angeführten charakteristischen Abänderungen an den weiblichen Körperformen kommt noch ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal, welches sich auf die Zeitdauer des Wachsthumes bezieht. Schon eine oberflächliche Beobachtung hat gelehrt und Quetelet's Messungen haben es bestättiget, dass das Wachsthum des weiblichen Geschlechtes verhältnissmässig rascher vor sich gehe, als das des männlichen, indem die Mädchen gegen die Knaben von gleichem Alter körperlich viel entwickelter und ausgebildeter erscheinen. Dies stimmt auch mit der zweiten Erfahrung überein, dass die Pubertät beim weiblichen Geschlechte etwas früher, nämlich gegen das 13. Lebensjahr eintritt, während sie beim männlichen Geschlechte erst nach zurückgelegtem 14. Lebensjahre einzutreten pflegt.

Das Wachsthum des weiblichen Körpers geht nach **Mondmonaten** vor sich in derselben Progression, in welcher das Wachsthum des männlichen Körpers nach Sonnenmonaten vorschreitet. Beide stehen also unter der Herrschaft der Zahlen 300, 24, 1, 3, 6 ... nur mit dem Unterschiede, dass diese Zahlen beim weiblichen Geschlechte Mondmonate von 28 Tagen bedeuten. Die Gesammtdauer des Wachsthumes beträgt daher hier 25 Mondjahre d. i. 23 Sonnenjahre. Das Wachsthum des weiblichen Körpers ist demnach der Zeit nach absolut kürzer, die Zunahmen aber sind blos relativ grösser als die beim männlichen Geschlechte und bleiben absolut weit hinter diesen zurück. So wächst die Körperlänge des neugebornen Knaben von $50^{Cm.}$ auf $175^{Cm.}$ heran, die Geburtsgrösse wird also zu Ende des Wachsthumes $3\frac{1}{2}$ mal erscheinen; die mittlere Körperlänge des neugebornen Mädchens von $48^{Cm.}$ wird schliesslich $173^{Cm.}$ gross, während sie proportional zum Wachsthume des Knaben blos $48 \times 3\frac{1}{2} = 168^{Cm.}$ erreicht hätte. Weil aber die Mädchen schon bei der Geburt durchschnittlich um $2^{Cm.}$ kleiner sind als die Knaben, so wird dadurch die absolute Kleinheit des weiblichen Geschlechtes erklärlich.

Erklärung der Gesetztafeln.

Die Gesetztafel für das männliche Geschlecht *(Taf. LV Nr. 78)* enthält zweiundzwanzig verticale Columnen, die für das weibliche Geschlecht *(Taf. LV Nr. 79)* dreiundzwanzig, weil die weibliche Hüftenbreite nicht wie die männliche der Schulterbreite gleich ist, mithin einer eigenen Bestimmung bedarf.

In den ersten zwei Columnen finden sich die Zeitbestimmungen des Gesetzes, nämlich die natürliche Reihe der 24 Epochen und ihre Endmomente in Monaten ausgedrückt. Die folgenden Columnen enthalten die den Zeitbestimmungen entsprechenden Wachsthumszunahmen der einzelnen Körpertheile. Der Hals wurde gegen die anatomische Ordnung dem Kopfe vorangestellt, weil seine Länge, $1^{Cm.}$, die Maasseinheit des ganzen Körperbaues und zugleich die Zahleneinheit des ganzen arithmetischen Gebäudes ist.

Die Zahlenbestimmungen sind in drei verschiedenen Schriftarten gedruckt, damit man auf den ersten Blick jene Grössen zusammenfassen könne, welche als Theile eines Ganzen zusammengehören und dieses jederzeit als Summe ergeben. So erscheinen die vier Theile der Oberlänge und sie selbst, dann die Unterlänge

mit ihren zwei Theilen, endlich die Körperlänge und alle übrigen Grössen, welche aliquote Theile derselben sind, in derselben Schrift.

Wagrechte Zifferreihen gibt es fünfundzwanzig, indem nebst den 24 Epochen auch der Neugeborne eine eigene Reihe erheischt. Selbstverständlich sind in jeder Horizontalreihe die Grössenbestimmungen aller Körpertheile enthalten, wie sie der betreffenden Epoche zukommen. Werden daher die Grössen irgend einer Horizontalreihe zur plastischen Construction der menschlichen Gestalt verwendet, so zeigt das so entstandene Modell die absolute Verkörperung dieser Zahlen oder die prototypen Dimensionsverhältnisse des menschlichen Körperbaues.

Um auf solche Weise das Gesetz des Wachsthumes zur unmittelbaren Anschauung zu bringen, wurden von 24 solchen Horizontalreihen, welche 12 Menschenpaare in den wichtigsten Altersstufen repräsentiren, Gyps-Modelle angefertigt, diese in drei Stellungen photographirt und in Erz gegossen. Das Werk mit dem dazu gehörigen Album der Photographien und den 24 Erz-Statuetten war auf der Londoner Weltausstellung des Jahres 1862 in der österreichischen Abtheilung, 29. Classe der Gegenstände für Unterrichtszwecke, ausgestellt, und wurde durch die Preismedaille ausgezeichnet.

Das Diagramm.

Um das mathematische Gesetz des menschlichen Wachsthumes graphisch darzustellen und seine Form geometrisch zu prüfen, wurde *(Taf. LVII Nr. 81)* ein Diagramm construirt, wie dasselbe in allen Zweigen der Naturwissenschaft für die Zahlenresultate die ausgedehnteste Anwendung findet.

Als Abscisse ox wurde die vorschreitende Zeit, als Ordinaten wurden die im Wachsthume begriffenen sechs Haupt-Abschnitte der ganzen Körperlänge gewählt. Diese sechs Theile der Körperlänge wurden in derselben Lage und Reihenfolge übereinandergestellt, wie sie am Körper des Menschen vorkommen. Indem man mit der Geburtsgrösse des Knaben begann, wurde so die stufenweise Entwicklung und Vergrösserung jedes einzelnen Theiles und der ganzen Körperlänge durch alle 24 Epochen bis zum vollständig beendigten Wachsthume fortgeführt.

Man sieht auf solche Weise das stufenweise Vorschreiten des Wachsthumes durch Bogenlinien abgebildet, deren 25 Ordinaten ein klares Bild von der jedesmaligen Grösse, Lage und den gegenseitigen, in steter Umwandlung

begriffenen Grössenverhältnissen aller Cardinal-Theile der Körperlänge und ihrer selbst ergeben.

Aus diesem Diagramme ist nun ersichtlich, dass die drei Abschnitte der Curve eben so vielen Parabel-Stücken gleichen. Da nämlich die Abscisse der Zeit in einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung vorschreitet, die Abscisse der Parabel aber im quadratischen Verhältnisse wächst, welches Verhältniss ebenfalls eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bildet, die Ordinaten dabei gleichmässig und stetig zunehmen: so gibt sich daraus eine grosse Aehnlichkeit und Uebereinstimmung zwischen beiden Curven zu erkennen. Doch sind dabei die Uebergänge von einem Parabel-Abschnitte zum anderen so hervortretend und ungleich, dass das Gesetz kein continuirliches genannt werden kann, sich vielmehr als ein stoss- oder sprungweises, welches drei Interpolations-Glieder besitzt, manifestirt.

In dieselbe Diagrammtafel wurde zugleich jene Linie eingezeichnet, welche entsteht, wenn man die ganze Körperlänge aus dem Siebener-Quadrate bildet. Diese Linie heisst deshalb die geometrische Constructions-Linie und zeigt in jedem Momente genau den Unterschied an, welchen das geometrische Wachsthumsgesetz gegen das ziffermässige ergibt. Obwohl diese Curve sich etwas mehr einer gleichförmig aufsteigenden nähert als die nach den Ziffern des Gesetzes gezogene, so ist doch noch der Uebergang aus der 18. Epoche in die 19. Epoche so markirt, dass das stossweise Wachsthum auch daraus mit Bestimmtheit erkannt wird.

Dieses Diagramm würde für die Zwecke der bildenden Kunst um so lehrreicher werden, wenn über diejenigen Ordinaten, welche die Hauptabschnitte des menshlichen Wachsthumes bezeichnen, von eines tüchtigen Meisters Hand die Umrisse der menschlichen Figur, wie sie das System der Construction für die einzelnen Epochen ergibt, gezeichnet und eingetragen werden möchten. Dann würde sich der Künstler auch ohne jede Berechnung und geometrische Construction ein deutliches und genaues Bild von den wahren und allein richtigen Grössenverhältnissen der einzelnen Körpertheile des Menschen für jedes Alter und für beide Geschlechter verschaffen können; es würden dadurch die vollendetsten Modelle dieser Dimensionsverhältnisse zu leicht fassbarer Anschauung gebracht werden.

Die

Grund-Ideen des Gesetzes.

Das Gesetz des menschlichen Wachsthumes zeigt, wie ein jedes Naturgesetz, in seiner Wesenheit, Form und Gliederung drei verschiedene Seiten: eine ideele, eine abstracte und eine factische, der Wirklichkeit angehörige Seite.

I. Ideele Form des Gesetzes.

Betrachtet man die ersten drei Columnen der Gesetztafeln (*Taf. LV, Nr. 78, 79*), so findet man in ihnen die ideelen Bestimmungen einer Naturerscheinung, hier des Wachsthumes, in höchster Allgemeinheit und Einfachheit aufgestellt.

Alle drei gehen von der Einheit der Zeit und des Raumes aus und geben die allgemeine Ordnung an, nach welcher ein jedes Wachsthum, also nicht blos das menschliche, vor sich geht. Sie enthalten nicht blos unwandelbare Zahlen, sondern auch ihre Ideen, die vorher gedacht und gefasst werden mussten, ehe das Gesetz des individuellen Wachsthumes durch die Ziffer ausgedrückt werden konnte. Sie bezeichnen zuerst das allgemeine Verhältniss, in welches eine Naturerscheinung nach der zu durchwandernden Zeit — ihrer Aufeinanderfolge — und nach dem einzunehmenden Raume — ihrer Raumbestimmung — treten muss, wobei aber der wirkliche Raum, den sie einnehmen, und die eigentliche Zeit, die sie brauchen wird, noch gar nicht in Betracht kommen.

Diese allgemeinsten Bestimmungen sagen nur, dass jedes Wachsthum als solches von der Einheit sowohl nach Zeit als nach Raum ausgehe, dass

dabei drei Einheiten thätig seien und daher die erste Fundamental-Bestimmung dieser Naturerscheinung, so wie sie real durch Kraft, Zeit und Raum bedingt ist, auch formell in der mathematischen Trias ihre Grundlage erhalte.

Wie weit sich nun die aus der Trias hervorgehenden Einheiten von ihr entfernen, und ob sie dieses gleichförmig, beschleunigt oder verzögert thun, ist durch die zweite Einheit oder die Dyas bestimmt. Durch die dritte Einheit, welche den Raum an und für sich angibt, bekommen aber erst die beiden früheren ihren Inhalt oder ihre Beziehung zum Raume; denn erst die dritte Einheit, als die Bestimmung des auszufüllenden Raumes bezeichnet denjenigen Vorgang, der durch die zwei Bestimmungen der Aufeinanderfolge zur Erkenntniss, Beurtheilung und Schätzung gebracht wird. Wie oft sich die erste Einheit in dem bestimmten Processe vervielfältigt, wird durch ihre vierundzwanzig Wiederholungen festgestellt. Ein Analogon dazu liefert eine andere Naturerscheinung, die Entfernung der Töne vom Grundtone, durch die siebenmalige Wiederholung der Einheit.

Am besten glaube ich den Begriff dieser ideelen Einheiten dadurch ausdrücken zu können, dass ich darauf hinweise, wie bei der ersten Entdeckung dieser allgemeinsten Ideen des Gesetzes aus den vorgenommenen Messungen nur dreiundzwanzig solche Einheiten, welche Epochen genannt wurden, abgeleitet werden konnten, und wie die damals bemerkte Regelmässigkeit und Ordnung des Wachsthumes sich nie zu einem vollendeten mathematischen Gesetze hätte gestalten können, wenn diese Unvollkommenheit in der ersten und obersten Grundbestimmung durch die Auffindung der vierundzwanzigsten Epoche nicht behoben worden wäre.

Diese vierundzwanzig Epochen aber erscheinen wieder durch die Trias in drei Abschnitte getheilt, die sich zu einander wie die Einheit zur Zweiheit verhalten, indem der mittlere Abschnitt doppelt so viele Einheiten enthält als der erste und dritte. Wir sehen hier die Einheit zur Zweiheit vorschreiten und dann wieder zur Einheit zurückkehren.

Die Idee, welche der zweiten Columne zum Grunde liegt, besteht darin, dass sie ebenfalls mit der Einheit beginnt, welche dieselbe Bedeutung und Grösse hat, wie die Einheit der Epochen, da die erste Epoche zugleich die Einheit der Zeit darstellt. Die vierundzwanzig Epochen folgen

aber einander nicht im selben Zeitmaasse, sondern sie thun dies verzögert nach dem Vorschreiten einer vierundzwanziggliedrigen arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, deren Anfangsglied die Einheit und deren Differenz abermals die Einheit bildet. Da nun die vierundzwanzig Glieder dieser arithmetischen Reihe zweiter Ordnung genau die Endmomente der vierundzwanzig Epochen bezeichnen, so zerfallen sie ebenfalls in die nämlichen drei Abschnitte wie die Epochen selbst. Der mittlere Abschnitt enthält die doppelte Anzahl Glieder des ersten sowie des dritten Abschnittes, und die Summe der Zeiteinheiten des mittleren Abschnittes ist ebenfalls gleich der Summe der Zeiteinheiten des ersten und des dritten Abschnittes.

Nach diesen zwei ideelen Bestimmungen der Zeit folgt in der dritten Columne die Idee der Raumbestimmung. Hier sehen wir abermals, dass diese Bestimmung von der Einheit ausgehend nach vierundzwanzig Stufen aufsteigt und auch in drei Abschnitte eingetheilt ist.

Diese Einheit erscheint nun am Körper des Neugeborenen theils als Maasseinheit in ihrer Einfachheit, theils kommt sie an den verschiedenen Körpertheilen vervielfältigt vor, doch so, dass sie in ihrer Vervielfältigung überall ganz, daher nirgends getheilt aufzufinden ist. Es gehört also zur Idee der Raumbestimmung des Wachsthumes, dass alle Hauptabschnitte des Körpers aus Einheiten zusammengesetzt sind, weshalb sie auf dem Grundprincipe der Mehrheit von der Einheit beruhen.

So findet man sie an der Kopflänge zwölfmal, an der Brustbeinlänge siebenmal, an der Bauchlänge fünf- und fünfmal, am Ober- und Unterschenkel achtzehnmal und an der Höhe des Knöchels zweimal vor. Betrachtet man aber diese Körpertheile in ihrer Entwicklung von der Geburt bis zum vollendeten Wachsthume, so wird man finden, dass die Kopflänge zweimal, die Brustbeinlänge dreimal mehr der Einheit, die Bauchlänge zweimal mehr der Dreiheit, die Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels viermal mehr der dreizehnfachen Einheit und die Knöchelhöhe viermal mehr der Einheit grösser geworden sind, als sie bei der Geburt gewesen waren.

Eine fernere ideele Raumbestimmung sagt, dass der ganze Körper und alle seine Theile in jedem der drei Abschnitte ebenso um die Einheit wachsen, wie dieses an der Grundeinheit der Epochen stattfindet. Der Körper und seine Theile schreiten während der Dauer eines Abschnittes mit jener

Einheit vorwärts, die sie in der ersten Epoche aufgenommen hatten; sie nehmen daher während des ersten Abschnittes sechs solche Einheiten auf. Im zweiten Abschnitte schreiten sie mit jener Grösse als Einheit zwölfmal vorwärts, die sie in der ersten Epoche dieses Abschnittes aufgenommen hatten, um dann im dritten Abschnitte wieder sechsmal um jene Maasseinheit zuzunehmen, die ihnen in der ersten Epoche dieses Abschnittes zu Theil geworden war.

Die höchste ideele Raumbestimmung endlich besteht darin, dass ein jeder menschliche Körper nur dreieinhalbmal so gross werden kann, als er bei der Geburt gewesen ist; dann darin, dass er zu Ende des ersten Abschnittes bereits mehr als die Hälfte seiner ihm zukommenden Grösse erreicht hat.

Fasst man nun alle diese ideelen Bestimmungen kurz zusammen, so lassen sie sich in folgenden Sätzen ausdrücken:

1. Das Wachsthum wird durch drei Einheiten beherrscht, welche ungetheilt, daher vollkommen sind.

2. Da sie überall dieselbe Vervielfältigung und Gruppirung zeigen, so erscheinen sie in völlig gleicher Function.

3. Die Kraft ihres Einflusses nach Zeit und Raum ist bei der Ordnung des Wachsthumes dieselbe, sie besitzen daher dieselbe Wesenheit und Natur. Wenn aber die Einheit der Raumbestimmung einer Naturerscheinung zugleich ihre Zeiteinheit ist, so fallen die drei Einheiten dieser Trias in eine einzige Einheit zusammen, der Einheit also wird die Dreiheit inhäriren.

4. Diese drei Einheiten entwickeln sich in drei Stufen, die sich zu einander verhalten wie die Einheit zur Zweiheit und wie diese zur Einheit. In ihrem Vorschreiten zeigen sie eine Geschwindigkeit, welche sich nach dem Vorschreiten einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung mit der Differenz der Einheit gestaltet.

5. Die Grössenzunahme ist in den einzelnen Epochen aller Abschnitte eine gleiche, sie beträgt abermals die Einheit.

6. Der Bau der menschlichen Figur beruht auf den Grundprincipien des Quadrates — das Verhältniss der Kathete zur Hypotenuse ist seine Uridee.

II. Abstracte Form des Gesetzes oder die Grundzahlen.

Aus den ideelen Bestimmungen entstehen nun jene näheren Angaben, welche man Grössenverhältnisse oder Proportionen nennt, und bei denen abermals keine Rücksicht auf die im speciellen Falle vorkommenden positiven Grössen zu nehmen ist, sondern die, sobald ein Theil des menschlichen Körpers als Einheit feststeht, ein bestimmtes Vielfache dieser Einheit zeigen.

Diese abstracte Einheit ist die mittlere Rippenbreite des neugebornen Knaben. Sie ist daher noch keine arithmetische Grösse, sondern die Einheit jener Proportionen, in welchen die prototype Menschengestalt erscheinen soll und unter gewissen Umständen auch erscheint.

Diese prototype Menschengestalt zeigt nach dem Gesetze in den wichtigsten Körperabschnitten folgende Proportionen und zwar beim neugebornen Knaben: die Kopflänge mit zwölf Einheiten, die Halslänge mit Einer Einheit, die Brustbeinlänge mit sieben, die Bauchlänge mit zehn, die Länge des Ober- und Unterschenkels mit achtzehn, die Knöchelhöhe mit zwei, die ganze Körperlänge mit funfzig Einheiten. — Bei wagrecht ausgestreckten Armen beträgt der Raum zwischen der Mittellinie des Körpers und dem Kopfe des Oberarmbeines drei, die Länge des Oberarmes neun, die des Vorderarmes sieben, der ausgestreckten Hand sechs, also die halbe Körperlänge fünfundzwanzig Einheiten.

Da mit dieser abstracten Maasseinheit die Grössen aller wichtigen Körpertheile in den beiden Gesetztafeln *(Taf. LV. Nr. 78, 79)* angegeben sind, so kann ich bezüglich ihrer Proportionen dahin verweisen und füge hier nur bei, dass alle Zahlen Rippenbreiten bedeuten und daher mit diesem ihrem Grundmaasse ausgemessen erscheinen, und es muss als ein sehr wichtiger Umstand angesehen werden, dass der zu den Messungen an der Natur verwendete Centimeter identisch ist mit der mittleren Rippenbreite des mittleren neugebornen Knaben mit $50^{\text{Cm.}}$ Körperlänge. Die Länge des Brustkorbes maass in diesem Falle $12^{\text{Cm.}}$ und da sie von zwölf Rippen gebildet wird, so war der zwölfte Theil des Brustkorbes — die mittlere Rippenbreite — durch die Grösse von $1^{\text{Cm.}}$ bezeichnet, beide Grössen fielen daher dem Werthe nach in Eins zusammen.

Ich nenne also die in den Gesetztafeln aufgestellten Zahlen abstracte Grössen, weil sie in jedem concreten Falle einen anderen Werth haben können, welcher Werth nämlich von der jedesmaligen Körperlänge abhängt, aber nie aufhören, die Grundbestimmungen zu sein. Denn wie es die Messungen erwiesen haben, wächst der gesammte Körper und seine Theile genau nach jenem Verhältnisse, welches zwischen ihm und diesen prototypen Grössenverhältnissen bei der Geburt obgewaltet hat.

Die abstracte Seite des Gesetzes tritt noch deutlicher hervor, wenn man den geometrischen Aufbau des menschlichen Körpers näher in's Auge fasst. Hier hat man es nicht mehr mit concreten Zahlen, sondern mit den allgemeinen Bestimmungen eines geometrischen Systems zu thun, das nicht sowohl durch seine absolute Grösse, als durch die gegenseitigen Beziehungen seiner Linien die relativen Grössen der einzelnen Körpertheile ergibt.

Die Längenachse des Körpers des neugebornen Knaben bildet den Durchmesser eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Nabel liegt. Der Kreis aber schliesst nicht blos die ganze Körperlänge ein, sondern er wird auch als geometrische Constructionslinie bei den meisten Körpertheilen aufgefunden, indem deren Lage und Entfernung durch Kreislinien begränzt erscheinen. So sieht man die Körperlänge des Neugebornen durch fünf Kreise getheilt, die bei gleichem Durchmesser die wichtigsten Punkte des Körpers berühren. Der Kreis ist daher in seinem Verhältnisse zum Quadrate als die erste Grundform des Baues des Menschen zu betrachten.

Der Durchmesser des ersten jener fünf Kreise erstreckt sich vom Scheitel bis zur Mundspalte. Der mit diesem Durchmesser beschriebene Kreis schmiegt sich genau an das Schädelgewölbe an, begränzt zu beiden Seiten den queren Kopfdurchmesser und reicht nach hinten bis zur untersten Ausbuchtung des Hinterhauptbeines und nach vorne bis zum Alveolarrande des Oberkiefers. Auch trägt er wesentlich zur Bestimmung der Grösse und Form der Ohrmuscheln bei.

Der zweite Kreis, dessen Durchmesser seine Endpunkte in der Mundspalte und der Spitze des Schwertknorpels hat, bezeichnet zu beiden Seiten die Lage der Brustmuskel.

Der dritte Kreis ist der wichtigste, es ist der Nabelkreis.

Der **vierte** Kreis reicht mit seinem senkrechten Durchmesser vom oberen Rande der Schoossfuge bis zu jener wagrechten Linie, die am unteren Rande beider Kniescheiben verläuft, und markirt zugleich die Contouren der beiden Oberschenkel.

Der **fünfte** Kreis endlich hat seinen Durchmesser zwischen dem unteren Rande beider Kniescheiben und der Sohle, und trägt zur Begränzung, Stellung und Form des Fusses wesentlich bei.

Ausser diesen **fünf** gleichen Kreisen in der Längenachse des Körpers findet man noch viele andere, welche mit den Endpunkten ihrer Durchmesser die Lage und Grösse der verschiedenen Körpertheile bestimmen.

Der Körper des Neugeborenen zeigt aber auch andere geometrische Figuren in grosser Zahl. So bildet der quere Kopfdurchmesser mit der Schulterbreite ein **Rechteck**, weil diese beiden Linien parallel und gleich gross sind. Dieselbe Figur entsteht durch die Schulterbreite und den ihr gleichen wagrechten Durchmesser des Nabelkreises, sowie ferner durch die Schulterbreite und die ihr ebenfalls gleiche und parallele Hüftenbreite. — Von den **Dreiecken** sind besonders zwei hervorzuheben:

a) jenes **gleichseitige Dreieck**, welches durch eine Brustwarze, die Schulterhöhe und den tiefsten Punkt des oberen Brustbeinrandes gebildet wird. Durch seine Seite wird der quere Kopfdurchmesser und die Schulterbreite bestimmt, durch diese die Hand, der Vorderarm und der Oberarm, durch den Vorderarm der Fuss;

b) jenes **gleichschenklige Dreieck**, welches aus der Mitte des oberen Brustbeinrandes zu beiden Brustwarzen gezogen erscheint. **Dieses** Dreieck hat Polyklet der Herstellung seines Canon der Menschengestalt zum Grunde gelegt, nach diesem Dreiecke haben die Aegypter und Griechen, dann Vitruv und Leonardo da Vinci gearbeitet, und Bonomi hat es als das wahre Naturmaass zur Construction der männlichen Gestalt in Aegypten kennen gelernt, von dort nach London gebracht und seiner Proportionslehre des erwachsenen männlichen Körpers zu Grunde gelegt.

Die wichtigste aller geradlinigen Figuren aber, welche am Körper des Menschen erscheinen, ist die **zweite Grundform** zum Bau desselben, nämlich das **Quadrat**. Nicht nur sehen wir, dass der ganze Körper die Seiten eines

Quadrates an sich trägt, indem die Körperlänge gleich ist den wagrecht ausgestreckten oberen Extremitäten, und dass viele einzelne Körpertheile ebenfalls Quadrate bilden, wie z. B. der Kopf in seiner seitlichen Ansicht, indem seine Länge und sein gerader Durchmesser gleich gross sind, sondern es hat sich auch das Quadrat als diejenige Figur erwiesen, welche den ganzen Aufbau des Körpers unter die bündigsten Normen stellt.

Eine eingehende Forschung, deren Resultate ich hiermit vorlege, hat dargethan, dass das magische Quadrat der Zahl Sieben der Grundriss des menschlichen Körpers ist.

Das

magische Quadrat der Zahl Sieben

der

Grundriss des menschlichen Körperbaues.

Im Gesetze des menschlichen Wachsthumes und Baues waren bis jetzt die Grössenverhältnisse jener *sieben* Körpertheile durch *Zahlen* ausgedrückt, welche als Grundlage für die Construction jeder menschlichen Figur dienen. Ohne Kenntniss dieser Zahlen war der Bau der Menschengestalt durch das bestimmte System der sich gegenseitig berührenden und durchschneidenden Kreise und geraden Linien nicht möglich. Obschon nun die zur Construction nothwendigen Zahlen im arithmetischen Theile des Gesetzes mit vollster Genauigkeit aufgestellt waren, so erschien der wundervolle Aufbau der menschlichen Gestalt noch immer nicht in jener *Einfachheit* und mathematischen *Einheit*, welche durch die Aufstellung einer *einheitlichen* geometrischen Basis statt der Complication der Ziffern mit der geometrischen Construction entstehen würde. Da der *eigentliche Ursprung* der *sieben Zahlen* des Gesetzes durch keine *mathematische* Function nachgewiesen werden konnte und ebensowenig der *nothwendige* Zusammenhang *dieser* Zahlen mit der *geometrischen Construction* ersichtlich war, so fehlte noch immer das *einheitliche Grundprincip* des Baues. Dieses musste entweder in der *Zahleneinheit* oder in der *Maasseinheit* liegen, und diese wieder musste aus *sich selbst* ohne Beihülfe einer zweiten heterogenen Grösse den *ganzen* Bau nicht allein *einleiten*, sondern auch fortführen und *vollenden*.

Bei dem Bau der Menschengestalt handelt es sich nur um die Bestimmung und Begränzung des Raumes.

Die Raumbestimmungen werden aber durch die Geometrie vermittelst des Punktes und der Linie begränzt; folglich schien die Geometrie berufen, durch sich und aus sich allein mit Ausschluss jeder arithmetischen Function das Problem lösen zu sollen.

Eine nähere Prüfung des magischen Quadrates aus der Zahl 7 wies zwar darauf hin, dass auch dem räumlichen Gesetze die Zahl vorstehe. Die Grundzahlen des magischen Siebener-Quadrates sind: die Zahl 7 als Wurzel, 25 als die Mittelzahl, 21 als die Leitzahl, 50 als die Summe der gleichen Paare, 175 als die Summe einer Reihe, 1, 6, 7, 8 als die Differenzen der in diesem Quadrate enthaltenen Progressionen. Die eine Haupt-Diagonalreihe beginnt mit der Zahl 22 und endigt mit der Zahl 28, diese beiden Zahlen addirt und mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt ergeben $(22 + 28)\frac{7}{2} = 175$, die Summe eines Streifens im Tetragramme.

Im Gesetze bezeichnet nun die Zahl 50 die normale Körperlänge des neugebornen Knaben. Sie besteht aus der Kopflänge 12, der Halslänge 1, der Brustbeinlänge 7 und der Knöchelhöhe 2, welche Grössen zusammen 22 ausmachen, ferner aus der Bauchlänge 10, der Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels 18, zusammen 28. Nimmt man die daraus resultirende Körperlänge mit 50 dreieinhalbmal, so erhält man die Körperlänge des erwachsenen Mannes mit 175.

Da ferner 7 die Brustbeinlänge, 25 die halbe Körperlänge, 1 die Maasseinheit, 6 und 8 die wichtigsten Wachsthumszunahmen, 21 die Länge des alle Breiten-Dimensionen bestimmenden Schlüsselbeines, dann der Hand, des geraden Kopfdurchmessers und des Abstandes der Gelenksköpfe beider wagrecht ausgestreckten Oberarmknochen bezeichnen, so schien es unzweifelhaft, dass das magische Quadrat der Zahl 7 in dem Werthe und der Bedeutung seiner Grundzahlen das Gesetz des menschlichen Baues enthalte, dass also das Gesetz ein arithmetisches sei. Doch alle Bemühungen, aus diesen Grundzahlen des Siebener-Quadrates das Gesetz durch eine arithmetische Function herzustellen und zu erklären, blieben fruchtlos. Der

Nachweis eines m a t h e m a t i s c h e n Zusammenhanges beider Zahlensysteme konnte nicht gegeben werden.

Ganz andere Resultate aber wurden erzielt, als die geometrische Construction der magischen Quadrate und Kreise überhaupt und die des Quadrates und der Kreise aus der Zahl 7 insbesondere einer tieferen kritischen Analyse unterzogen, als i h r e B e z i e h u n g e n zu d e n i n i h n e n e n t h a l t e n e n K r e i s e n u n d L i n i e n erkannt wurden. Nachdem nämlich die Figur des Neugebornen, wie *Taf. LVI Nr. 80* zeigt, in ein magisches Quadrat, dessen Seite gleich der Körperlänge war, eingetragen und Eines von den dadurch entstandenen 49 gleichen Quadraten der Analyse zu Grunde gelegt worden war, ergaben sich nachfolgende überraschende g e o m e t r i s c h e Resultate:

In dem Quadrate $ABCD$ ist wie bekannt, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, daher $AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$. Ist die Seite $AB = 7$, so ist $AC = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98}$; setzt man statt dieser irrationalen Grösse die ihr zunächst kommende rationale Zahl $\sqrt{100}$, so erhält man für AC den Werth 10. Das Verhältniss der Seite des Quadrates zur Diagonale lässt sich also hier in ganzen Zahlen nahezu mit 7 : 10 ausdrücken, wobei man nur einen Fehler von $+ 0{\cdot}1006$ begeht.

Setzt man daher das Verhältniss der ganzen Zahlen zum Behufe einer bestimmten Berechnung statt der wahren irrationalen Grössen ein, so kann man in dem auf solche Weise erhaltenen Rechnungsresultate in einem jeden Falle den Fehler bestimmen, der durch diese Substitution herbeigeführt worden ist, d. h. man wird stets die wahre Proportionalität der zu eruirenden Grössen herstellen und beurtheilen können. Wird sich nun dieser Fehler bei der praktischen Verwerthung als so gering erweisen, dass er bei irgend einer aus diesen Verhältnissen hervorgehenden Construction gar keine Störung mehr hervorbringt, so wird diese Substitution schon ihrer leichteren Handhabung wegen beibehalten und für alle einschlägigen Fälle mit aller Sicherheit benützt werden können. Dieses vorausgeschickt trage man nun die halbe Diagonale AE auf AB auf, so wird die Linie $FB = AB - AE$ sein. Trägt man ferner die Linie FB auf BE auf, so erhält man $GE = AE - FB$; GE zweimal auf AC aus dem Punkte C aufgetragen ergibt die Linie CO, und aus dieser bekommt man $OE = OC - AE$.

Auf diese Art sind alle jene Grössen gegeben, welche die Dimensionsverhältnisse des Körpers des neugebornen Knaben bilden. Da aber in den

Grössenverhältnissen des Körpers des neugebornen Knaben alle Grössenbestimmungen enthalten sind, die der menschliche Körper von der Geburt bis zur Zeit seines vollendeten Wachsthumes stufenweise durcheilt; so liegen in den relativen Grössenbestimmungen der Linien eines Quadrates alle Grundverhältnisse präformirt, welche den wundervollen Bau des menschlichen Körpers begründen und vollführen.

Will man nun aus diesen Linien die Dimensionsverhältnisse der Körpertheile des Neugebornen herstellen, so hat man folgendermaassen zu verfahren: Da der Nabel den Mittelpunkt eines Kreises bildet, in welchem der Neugeborne mit seiner ganzen Körperlänge steht, so trägt man die einzelnen Theile seiner Körperlänge auf eine senkrechte Linie so auf, dass man aus der Mitte beginnt und nach oben und unten mit dem Auftragen vorschreitet.

Man trägt daher zuerst den Halbmesser $\frac{AC}{2} = AE$ des Nabelkreises auf, dann nach oben die Brustbeinlänge AB, die Halslänge OE und zuletzt die Kopflänge $AE + AB$; nach unten beginnt man mit dem zweiten Radius des Nabelkreises AE und trägt nach ihm die gesammte Unterlänge mit

$$2AB + AE + OE$$

und zuletzt die Knöchelhöhe von der Sohle nach aufwärts mit FB auf. Somit erhält man für die oberhalb des Nabels gelegenen Theile

$$AB + AE + OE + (AB + AE) = 2AE + 2AB + OE,$$

für die unterhalb des Nabels gelegenen

$$2AE + 2AB + OE;$$

d. h. die Gesammtlänge der Theile über dem Nabel ist gleich der Gesammtlänge der Theile unter demselben; es werden die beiderseitigen Längen zusammengenommen der Durchmesser eines Kreises sein.

Substituirt man nun für diese Linien ihre Werthe, wie sie sich nach dem in ganzen Zahlen ausgedrückten Verhältnisse der Kathete 7 zur Hypotenuse 10 herausstellen, so erhält man

$$AE = 5, \quad AB = 7, \quad OE = 1, \quad FB = 2;$$

daher für die Theile über dem Nabel die Grösse

$$AB + AE + OE + (AB + AE) = 5 + 7 + 1 + (7 + 5) = 25,$$

für die Theile unter dem Nabel

$$2AE + (2AB + OE) = 10 + (14 + 1) = 25,$$

also für die Summe aller Theile 50.

Da aber am Körper des Neugeborenen die Kopflänge

$$ab = AB + AE = 12,$$

die Halslänge

$$bc = OE = 1,$$

die Länge des Brustbeines

$$cd = AB = 7,$$

des Bauches

$$df = AC = 10,$$

des Ober- und Unterschenkels

$$fh = 2AB + AE + OE - FB = 18$$

und die Höhe des Knöchels

$$hi = FB = 2 \text{ ist,}$$

so hat man aus den Theilen eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieckes, dessen Kathete = 7 ist, alle Dimensionen der Körperlänge entnommen und zusammengetragen. Diese Körperlänge beträgt nach dem Gesetze des Wachsthumes $50^{\text{Cm.}}$ Beschreibt man daher um die Figur des neugeborenen Knaben ein Quadrat und theilt dessen Seite in 7 gleiche Theile, so erhält man für die Seite eines der 49 Quadratfelder den Werth

$$AB = 50 : 7 = 7{\cdot}142.$$

Berechnet man nun aus dieser Seite nach dem Pythagoreischen Lehrsatze die Werthe aller Linien des Constructions-Quadrates, so erhält man

$$\begin{aligned} AC &= 10{\cdot}07022 \\ AE &= 5{\cdot}035 \\ FB &= 2{\cdot}107 \\ EG &= 2{\cdot}928 \\ OE &= 0{\cdot}821 \end{aligned}$$

also für die Länge des Kopfes	$ab = AB + AE =$	12·177
für die Länge des Halses	$bc = OE =$	0·821
für die Länge des Brustbeines	$cd = AB =$	7·142
für die Länge des Bauches	$df = AC =$	10·070
für die Länge der Beine	$fh = 2AB + AE + OE - FB =$	18·033
für die Knöchelhöhe	$hi = FB =$	2·107
	$ac =$	50·350

Für die Dimensionen der ausgestreckten Arme ergeben die Linien:

$$EG = xc = 3$$

den Raum von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmbeines,

$AB + AE - EG = yl = 9$ die Länge des Oberarmes,

$AB = ln = 7$ die Länge des Vorderarmes,

$AE + OE = mn = 6$ die Länge der Hand.

Setzt man für die ganzen Zahlen ihre berechneten Werthe, so erhält man

$EG =$	2·928
$AB + AE - EG =$	9·249
$AB =$	7·142
$AE + OE =$	5·856
halbe Körperlänge =	25.175

Nimmt man aber die Seite eines Quadratfeldes $AB = 7$, so erhält man

$AC =$	9·8994
$AE =$	4·9497
$FB =$	2·0503
$EG =$	2·8994
$OC =$	5·7988
$OE =$	0·8491

Daraus bekommt man für die Theile der Körperlänge:

$$
\begin{aligned}
AB + AE &= 11.9497 \\
OE &= 0{\cdot}8491 \\
AB &= 7 \\
AC &= 9{\cdot}8994 \\
3OC &= 17{\cdot}3964 \\
FB &= 2{\cdot}0503 \\
\hline
& 49{\cdot}1449
\end{aligned}
$$

Für die Dimensionen der Breite:

$$
\begin{aligned}
3OE &= 2{\cdot}5473 \\
2AE - OE &= 9{\cdot}0503 \\
AB &= 7 \\
AE + OE &= 5{\cdot}7988 \\
\hline
& 24{\cdot}3964
\end{aligned}
$$

Corrigirt man die irrationalen Grössen in beiden Berechnungen nach den Regeln der Mathematik, so erhält man dort die Summen 50 und 25, hier 49 und $24^1/_2$, also eben jene Zahlen, welche der Berechnung zum Grunde gelegt wurden. Daraus geht nun hervor, dass in beiden Fällen die Proportionalität der Zahlen untereinander dieselbe ist, und dass die ganzen Zahlen des Gesetzes diese Proportionalität präcis ausdrücken.

Die geometrische Function ist also die absolut richtige, durch ihre arithmetischen Substitutionen kann sie nicht ganz vollständig ausgedrückt werden; am genauesten thun dieses die **Zahlen des Gesetzes.**

Um nun zu zeigen, wie sich die Construction, welche durch die in ganzen Zahlen ausgedrückten Dimensionen hergestellt wurde, zu jener verhalte, welche aus dem Quadrate entsteht, sind auf *Tafel LVI. Nr. 81* beide Constructionen so übereinander gelegt, dass ihre Unterschiede klar vor Augen treten. Hier sieht man nun, dass die ganze Körperlänge $\alpha\eta$ der aus dem Quadrate construirten Figur, welche auf der Tafel punktirt erscheint, um beiläufig $\frac{1}{2}$ Cm. grösser ist als jene, die mit den Ziffern des Gesetzes hergestellt worden war. Diese

Vergrösserung rührt daher, weil die M a a s s e i n h e i t des magischen Quadrates um 0·142 grösser ist als die M a a s s e i n h e i t der Construction nach dem Gesetze. Nebenstehende Tafel *(Pag. 145)* zeigt die Aufsteigung der Körperlänge in den 24 Epochen des Wachsthumes nach der geometrischen und arithmetischen Construction.

Wir sehen daher, dass die im Gesetze des Wachsthumes aufgestellten g a n z e n Zahlen die P r o p o r t i o n a l i t ä t der einzelnen Körpertheile fast mit a b s o l u t e r Genauigkeit bezeichnen, also zu jeder Berechnung als die wahren Werthe angesetzt werden können. Da ferner die Zahlenverhältnisse des neugeborenen Knaben die Grundlage zum Aufbau aller Stufen des Wachsthumes in sich enthalten, so vermag man aus ihnen alle Dimensionsverhältnisse der verschiedenen Altersstufen mit gleicher Sicherheit und Leichtigkeit abzuleiten. Die Theile des Neugeborenen, zur Construction des 21 Monate alten Knaben verwendet, ergeben

die Kopflänge $ab + \frac{ab}{2} = 18$
die Halslänge $de = 5$
die Brustbeinlänge $ab + bc = 13$
die Bauchlänge $df + mn = 16$
die Länge des Ober- und Unterschenkels $2fh = 36$
die Knöchelhöhe $cx = 3$
die halbe Schulterbreite $xl = 9$

Für die Gestalt des 171 Monate alten Knaben ergeben die Theile des Neugeborenen:

die Länge des Kopfes $ab + bc + df = 23$
die Länge des Halses $cd = 7$
die Länge des Brustbeines $3cd = 21$
die Länge des Bauches $2ab = 24$
die Länge des Ober- und Unterschenkels $4fh + df = 82$
die Knöchelhöhe $nm = 6$
die halbe Schulterbreite $df + mn = 16$

Bestimmung der Körperlänge

nach der geometrischen Construction

und der

Diagrammtafel.

Epoche	Männlich		Weiblich	
	Nach dem Gesetze	Nach der geometrischen Construction	Nach dem Gesetze	Nach der geometrischen Construction
	50	50·35	48	48·30
1	$56^{10}/_{12}$	57·23	$54^{10}/_{12}$	55·18
2	$63^{8}/_{12}$	64·11	$61^{8}/_{12}$	62·06
3	$70^{6}/_{12}$	70·99	$68^{6}/_{12}$	68·94
4	$77^{4}/_{12}$	77·87	$75^{4}/_{12}$	75·82
5	$84^{2}/_{12}$	84·75	$82^{2}/_{12}$	82·70
6	91	91·63	89	89·58
7	97	97·68	95	95·63
8	103	103·73	101	101·68
9	109	109·78	107	107·73
10	115	115·83	113	113·78
11	121	121·88	119	119·83
12	127	127·93	125	125·88
13	133	133·98	131	131·93
14	139	140·03	137	137·98
15	145	146·08	143	144·03
16	151	152·13	149	150·08
17	157	158·18	155	156·13
18	163	164·234	161	162·184
19	165	166·271	163	164·234
20	167	168·308	165	166·271
21	169	170·345	167	168·308
22	171	172·382	169	170·345
23	173	174·419	171	172·382
24	175	176·443	173	174·419

Für die Dimensionsverhältnisse des erwachsenen Mannes

die Länge des Kopfes $2AB + 2AE = ab = 24$

die Länge des Halses $3GE = xl = 9$

die Länge des Brustbeines $AB + 3AE = ab + df = 22$

die Länge des Bauches $2AE + 2AB + FB = 2ab + 2bc = 26$

die Länge des Ober- und Unterschenkels $4fh + df = 85$

die Höhe des Knöchels $xl = 9$

Von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmknochens

$$3\tfrac{1}{2}GE = 3\tfrac{1}{2}cx = 10\tfrac{1}{2}$$

die Länge des Oberarmes $3\tfrac{1}{2}(3GE) = 3\tfrac{1}{2}xl = 31\tfrac{1}{2}$

die Länge des Vorderarmes $3\tfrac{1}{2}AB = 3\tfrac{1}{2}ln = 24\tfrac{1}{2}$

die Länge der Hand $3\tfrac{1}{2}(2GE) = 3\tfrac{1}{2}nm = 21$

Sind aber diese vorzüglichsten Dimensionsverhältnisse des menschlichen Körpers bekannt, so lassen sich nach dem im Gesetze des Wachsthumes aufgestellten Constructions-Systeme alle übrigen Theile mit dem Zirkel in der Hand herstellen; es ist somit in der dem rechtwinkligen gleichsckenkligen Dreiecke als der Hälfte eines Quadrates eigenen Proportionalität der Seiten nicht nur das Grundprincip der Proportionalität der menschlichen Gestalt gegeben, sondern diese kann auch in allen ihren Phasen und Theilen aus diesem Dreiecke, welches Pythagoras das **Constructions-Dreieck aller geometrischen Formen** nannte, abgeleitet werden.

Ferner ist der Radius des magischen Kreises $Ee = af$

„ „ „ „ $He = fi$

„ „ „ „ $Me = eg$

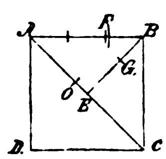
„ „ „ „ $Le = xn$

„ „ „ „ $Ne = xm$

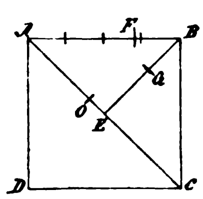
Aus dieser ziffermässigen Uebereinstimmung der Radien der magischen Kreise des Siebner-Quadrates mit den Dimensionen der wichtigsten Körperabschnitte geht wieder hervor, dass die Totalität des Siebner-Quadrates die Totalität des Körpers eben so genau in ihre Hauptabschnitte zerlege, wie wir die

quadratische Einheit des Siebner-Quadrates die einzelnen Körpertheile haben herstellen sehen. Es kann wohl daher keinem weiteren Zweifel unterliegen, dass der Grundriss der menschlichen Figur, so wie der specielle Aufbau aller seiner Theile aus dem Wesen des Siebner-Quadrates als aus seiner Uridee hervorgehe.

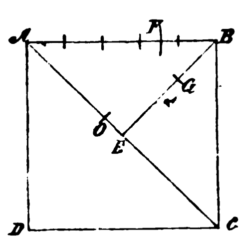
Um aber zu sehen, wie sich das soeben demonstrirte geometrische System in den Quadraten aus anderen Seitenzahlen verhalte, wurde dasselbe auf die Reihe der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden magischen Quadrate aus den Wurzeln 3—26 in Anwendung gebracht. Dadurch entstehen folgende Constructionen und Zahlenverhältnisse:



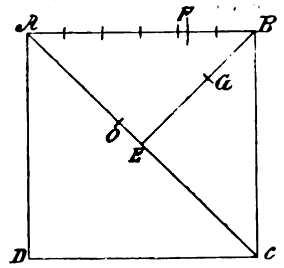
$AB = 3$	$AB + AE = 5{\cdot}1213$
$AC = 4{\cdot}2426$	$OE = 0{\cdot}3639$
$AE = 2{\cdot}1213$	$AB = 3$
$FB = 0{\cdot}8787$	$AC = 4{\cdot}2426$
$EG = 1{\cdot}2426$	$3OC = 7{\cdot}4556$
$OC = 2{\cdot}4852$	$FB = 0{\cdot}8787$
$OE = 0{\cdot}3639$	$21{\cdot}0621$



$AB = 4$	$AB + AE = 6{\cdot}8284$
$AC = 5{\cdot}6568$	$OE = 0{\cdot}4852$
$AE = 2{\cdot}8284$	$AB = 4$
$FB = 1{\cdot}1716$	$AC = 5{\cdot}6568$
$EG = 1{\cdot}6568$	$3OC = 9{\cdot}9408$
$OC = 3{\cdot}3136$	$FB = 1{\cdot}1716$
$OE = 0{\cdot}4852$	$28{\cdot}0828$

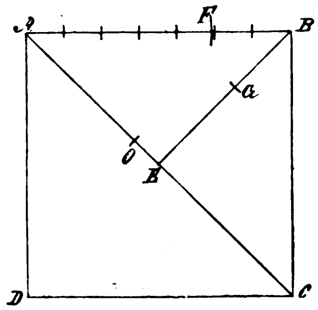


$AB = 5$	$AB + AE = 8{\cdot}5355$
$AC = 7{\cdot}071$	$OE = 0{\cdot}6065$
$AE = 3{\cdot}5355$	$AB = 5$
$FB = 1{\cdot}4645$	$AC = 7{\cdot}071$
$EG = 2{\cdot}071$	$3OC = 12{\cdot}426$
$OC = 4{\cdot}142$	$FB = 1{\cdot}4645$
$OE = 0{\cdot}6065$	$35{\cdot}1035$



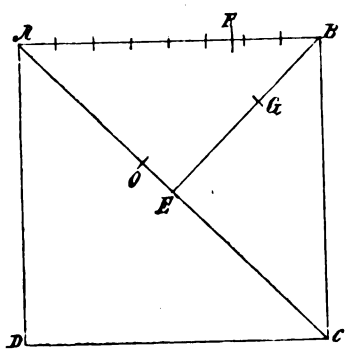
$AB = 6$
$AC = 8{\cdot}4852$
$AE = 4{\cdot}2426$
$FB = 1{\cdot}7574$
$EG = 2{\cdot}4852$
$OC = 4{\cdot}9704$
$OE = 0{\cdot}7278$

$AB + AE = 10{\cdot}2426$
$OE = 0{\cdot}7278$
$AB = 6$
$AC = 8{\cdot}4852$
$3OC = 14{\cdot}9112$
$FB = 1{\cdot}7574$
$42{\cdot}1242$



$AB = 7$
$AC = 9{\cdot}8994$
$AE = 4{\cdot}9497$
$FB = 2{\cdot}0503$
$EG = 2{\cdot}8994$
$OC = 5{\cdot}7988$
$OE = 0{\cdot}8491$

$AB + AE = 11{\cdot}9497$
$OE = 0{\cdot}8491$
$AB = 7$
$AC = 9{\cdot}8994$
$3OC = 17{\cdot}3964$
$FB = 2{\cdot}0503$
$49{\cdot}1449$



$AB = 8$
$AC = 11{\cdot}3136$
$AE = 5{\cdot}6568$
$FB = 2{\cdot}3432$
$EG = 3{\cdot}3136$
$OC = 6{\cdot}6272$
$OE = 0{\cdot}9704$

$AB + AE = 13{\cdot}6568$
$OE = 0{\cdot}9704$
$AB = 8$
$AC = 11{\cdot}3136$
$3OC = 19{\cdot}8816$
$FB = 2{\cdot}3432$
$56{\cdot}1656$

$AB = 9$
$AC = 12{\cdot}7278$
$AE = 6{\cdot}3639$
$FB = 2{\cdot}6361$
$EG = 3{\cdot}7278$
$OC = 7{\cdot}4556$
$OE = 1{\cdot}0917$

$AB + AE = 15{\cdot}3639$
$OE = 1{\cdot}0917$
$AB = 9$
$AC = 12{\cdot}7278$
$3OC = 22{\cdot}3668$
$FB = 2{\cdot}6361$
$63{\cdot}1863$

$AB = 10$	$AB + AE = 17{\cdot}071$
$AC = 14{\cdot}142$	$OE = 1{\cdot}213$
$AE = 7{\cdot}071$	$AB = 10$
$FB = 2{\cdot}929$	$AC = 14{\cdot}142$
$EG = 4{\cdot}142$	$3OC = 24{\cdot}852$
$OC = 8{\cdot}284$	$FB = 2{\cdot}929$
$OE = 1{\cdot}213$	$70{\cdot}207$

$AB = 11$	$AB + AE = 18{\cdot}7781$
$AC = 15{\cdot}5562$	$OE = 1{\cdot}3343$
$AE = 7{\cdot}7781$	$AB = 11$
$FB = 3{\cdot}2219$	$AC = 15{\cdot}5562$
$EG = 4{\cdot}5562$	$3OC = 27{\cdot}3372$
$OC = 9{\cdot}1124$	$FB = 3{\cdot}2219$
$OE = 1{\cdot}3343$	$77{\cdot}2277$

$AB = 12$	$AB + AE = 20{\cdot}4852$
$AC = 16{\cdot}9704$	$OE = 1{\cdot}4556$
$AE = 8{\cdot}4852$	$AB = 12$
$FB = 3{\cdot}5148$	$AC = 16{\cdot}9704$
$EG = 4{\cdot}9704$	$3OC = 29{\cdot}8224$
$OC = 9{\cdot}9408$	$FB = 3{\cdot}5148$
$OE = 1{\cdot}4556$	$84{\cdot}2484$

$AB = 13$	$AB + AE = 22{\cdot}1923$
$AC = 18{\cdot}3846$	$OE = 1{\cdot}5769$
$AE = 9{\cdot}1923$	$AB = 13$
$FB = 3{\cdot}8077$	$AC = 18{\cdot}3846$
$EG = 5{\cdot}3846$	$3OC = 32{\cdot}3076$
$OC = 10{\cdot}7692$	$FB = 3{\cdot}8077$
$OE = 1{\cdot}5769$	$91{\cdot}2691$

AB	$= 14$	$AB + AE$	$= 23·8994$
AC	$= 19·7988$	OE	$= 1·6982$
AE	$= 9·8994$	AB	$= 14$
FB	$= 4·1006$	AC	$= 19·7988$
EG	$= 5·7988$	$3OC$	$= 34·7928$
OC	$= 11·5976$	FB	$= 4·1006$
OE	$= 1·6982$		98·2898

AB	$= 15$	$AB + AE$	$= 25·6065$
AC	$= 21·2130$	OE	$= 1·8195$
AE	$= 10·6065$	AB	$= 15$
FB	$= 4·3935$	AC	$= 21·2130$
EG	$= 6·2130$	$3OC$	$= 37·2780$
OC	$= 12·4260$	FB	$= 4·3935$
OE	$= 1·8195$		105·3105

AB	$= 16$	$AB + AE$	$= 27·3136$
AC	$= 22·6272$	OE	$= 1·9408$
AE	$= 11·3136$	AB	$= 16$
FB	$= 4·6864$	AC	$= 22·6272$
EG	$= 6·6272$	$3OC$	$= 39·7632$
OC	$= 13·2544$	FB	$= 4·6864$
OE	$= 1·9408$		112.3312

AB	$= 17$	$AB + AE$	$= 29·0207$
AC	$= 24·0414$	OE	$= 2·0621$
AE	$= 12·0207$	AB	$= 17$
FB	$= 4·9793$	AC	$= 24·0414$
EG	$= 7·0414$	$3OC$	$= 42.2484$
OC	$= 14·0828$	FB	$= 4·9793$
OE	$= 2·0621$		119·3519

$AB = 18$	$AB + AE = 30{\cdot}7278$
$AC = 25{\cdot}4556$	$OE = 2{\cdot}1834$
$AE = 12{\cdot}7278$	$AB = 18$
$FB = 5{\cdot}2722$	$AC = 25{\cdot}4556$
$EG = 7{\cdot}4556$	$3OC = 44{\cdot}7336$
$OC = 14{\cdot}9112$	$FB = 5{\cdot}2722$
$OE = 2{\cdot}1834$	$126{\cdot}3726$

$AB = 19$	$AB + AE = 32{\cdot}4349$
$AC = 26{\cdot}8698$	$OE = 2{\cdot}3047$
$AE = 13{\cdot}4349$	$AB = 19$
$FB = 5{\cdot}5651$	$AC = 26{\cdot}8698$
$EG = 7{\cdot}8698$	$3OC = 47{\cdot}2188$
$OC = 15{\cdot}7396$	$FB = 5{\cdot}5651$
$OE = 2{\cdot}3047$	$133{\cdot}3933$

$AB = 20$	$AB + AE = 34{\cdot}142$
$AC = 28{\cdot}284$	$OE = 2{\cdot}426$
$AE = 14{\cdot}142$	$AB = 20$
$FB = 5{\cdot}858$	$AC = 28{\cdot}284$
$EG = 8{\cdot}284$	$3OC = 49{\cdot}704$
$OC = 16{\cdot}568$	$FB = 5{\cdot}858$
$OE = 2{\cdot}426$	$140{\cdot}414$

$AB = 21$	$AB + AE = 35{\cdot}8491$
$AC = 29{\cdot}6982$	$OE = 2{\cdot}5473$
$AE = 14{\cdot}8491$	$AB = 21$
$FB = 6{\cdot}1509$	$AC = 29{\cdot}6982$
$EG = 8{\cdot}6982$	$3OC = 52{\cdot}1892$
$OC = 17{\cdot}3964$	$FB = 6{\cdot}1509$
$OE = 2{\cdot}5473$	$147{\cdot}4347$

$AB = 22$	$AB + AE = 37{\cdot}5562$
$AC = 31{\cdot}1124$	$OE = 2{\cdot}6686$
$AE = 15{\cdot}5562$	$AB = 22$
$FB = 6{\cdot}4438$	$AC = 31{\cdot}1124$
$EG = 9{\cdot}1124$	$3OC = 54{\cdot}6744$
$OC = 18{\cdot}2248$	$FB = 6{\cdot}4438$
$OE = 2{\cdot}6686$	$154{\cdot}4554$

$AB = 23$	$AB + AE = 39{\cdot}2633$
$AC = 32{\cdot}5266$	$OE = 2{\cdot}7899$
$AE = 16{\cdot}2633$	$AB = 23$
$FB = 6{\cdot}7367$	$AC = 32{\cdot}5266$
$EG = 9{\cdot}5266$	$3OC = 57{\cdot}1596$
$OC = 19{\cdot}0532$	$FB = 6{\cdot}7367$
$OE = 2{\cdot}7899$	$161{\cdot}4761$

$AB = 24$	$AB + AE = 40{\cdot}9704$
$AC = 33{\cdot}9408$	$OE = 2{\cdot}9112$
$AE = 16{\cdot}9704$	$AB = 24$
$FB = 7{\cdot}0296$	$AC = 33{\cdot}9408$
$EG = 9{\cdot}9408$	$3OC = 59{\cdot}6448$
$OC = 19{\cdot}8816$	$FB = 7{\cdot}0296$
$OE = 2{\cdot}9112$	$168{\cdot}4968$

$AB = 25$	$AB + AE = 42{\cdot}6775$
$AC = 35{\cdot}3550$	$OE = 3{\cdot}0325$
$AE = 17{\cdot}6775$	$AB = 25$
$FB = 7{\cdot}3225$	$AC = 35{\cdot}3550$
$EG = 10{\cdot}3550$	$3OC = 62{\cdot}1300$
$OC = 20{\cdot}7100$	$FB = 7{\cdot}3225$
$OE = 3{\cdot}0325$	$175{\cdot}5175$

$$\begin{array}{rcl} AB & = & 26 \\ \hline AC & = & 36{\cdot}7692 \\ AE & = & 18{\cdot}3846 \\ FB & = & 7{\cdot}6154 \\ EG & = & 10{\cdot}7692 \\ OC & = & 21{\cdot}5384 \\ OE & = & 3{\cdot}1538 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} AB + AE & = & 44{\cdot}3846 \\ OE & = & 3{\cdot}1538 \\ AB & = & 26 \\ AC & = & 36{\cdot}7692 \\ 3OC & = & 64{\cdot}6152 \\ FB & = & 7{\cdot}6154 \\ \hline & & 182{\cdot}5382 \end{array}$$

Betrachtet man die Werthe der gleichnamigen Grössen in ihrer Aufsteigung durch die ganze Reihe der untersuchten Quadrate, so findet man, dass sie alle mit einer und derselben, ihnen eigenthümlichen Zunahme vorschreiten. Indem nämlich die Seitenzahl des Quadrates AB um 1 wächst, wird die Grösse $(AB + AE)$ nahe um 1·7, die Grösse AC um $\sqrt{2} = 1{\cdot}4$, die AE um 0·7, die Grösse $3OC$ um 2·5, die FB um 0·3 und die OE um 0·1 grösser, was für die jedesmalige Summe jener Theile, die beim Siebener-Quadrate die Körperlänge des Neugebornen ausmachen, eine Zunahme von 7 ergibt. Da nun diese auf ganze Zahlen corrigirten Summen die Zahlen 21, 28, 35, 42, 49, 56, . . . zeigen, so bilden dieselben eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit der Differenz 7. Bezeichnet also w die Seitenzahl des Quadrates, so ist der allgemeine Ausdruck für die Summe obiger Grössen in jedem Quadrate

$$S = 7w.$$

Man sieht hier ein System von Proportional-Zahlen sich entwickeln, welches in seiner stufenweisen Vergrösserung gleich bleibt und unter der Herrschaft der Zahl 7 steht. Die Zerlegung der Linien eines Quadrates in seine ihm angehörigen und eigenthümlichen Proportional-Grössen beruht auf dem Verhältnisse der Seite des Quadrates zu seiner halben Diagonale, welches durch 7 : 5 ausgedrückt erscheint.

Aus diesem Verhältnisse lassen sich, wie man weiss, alle Grössen von 1 — 7 durch Subtraction und Addition ableiten; denn

$$7 - 5 = 2;\; 5 - 2 = 3;\; 7 - 3 = 4;\; 5 - 4 = 1 \text{ und } 5 + 1 = 6.$$

Da aber aus diesen sieben Zahlen jede beliebige rationale Grösse zusammengesetzt werden kann, so ist es klar, dass in einem jeden Quadrate alle nur denkbaren Grössenverhältnisse enthalten sind und daher aus ihm abgeleitet und entnommen werden können. Die Möglichkeit der Herstellung dieser Verhältnisse beruht

aber auf der Natur und Wesenheit des Quadrates ebenso, wie aus der Natur des Kreises, dass nämlich sein Halbmesser die Peripherie in 6 gleiche Theile theilt, und dass sich der Durchmesser zur Peripherie wie 7 : 22 oder wie 1 : 3·14 verhält, gewisse geometrische Wahrheiten hervorgehen. Die Zahlen 7 und 5 sind also ebenso gut Attribut-Zahlen des Quadrates, wie die Zahlen 7, 22, 6 constituirende Zahlen des Kreises genannt werden.

Betrachtet man ferner jenen bis jetzt für paradox gehaltenen Satz des A. Ibn Esra, dass die Zahl des Flächeninhaltes eines gleichseitigen, einem Kreise eingezeichneten Dreieckes genau die Zahl der Peripherie ergibt, sobald man die Grösse des Durchmessers gleich 10 setzt, welche Zahl wieder die Diagonale des Siebener-Quadrates beziffert: so wird man wohl zugeben müssen, dass ein gewisser natürlicher Zusammenhang zwischen diesen Zahlen und Linien bestehe, dass sie einander gegenseitig bedingen und aus einem gemeinschaftlichen Principe herstammen, welches daher dem Wesen des Quadrates und Kreises zu Grunde liegt.

Die geometrischen Grössen unterscheiden sich aber von den Zahlenbestimmungen dadurch, dass sie stets rationale d. i. commensurable Grössen sind, während die arithmetischen Bestimmungen fast durchgehends irrationale Grössen ergeben, die selbst durch die am weitesten gehende Correction niemals jene Bestimmtheit der Linien erlangen, welche stets aus der Construction mit geometrischer Nothwendigkeit hervorgeht.

Diese Linien und Zahlenbestimmungen zeigen ferner das Eigenthümliche, dass sie beide die Grösse 7 mit gleicher Genauigkeit ergeben. Während nämlich die geometrische Einheit etwas kleiner ist als die arithmetische 1, die geometrische Zwei etwas grösser als die arithmetische 2, die geometrische Drei etwas kleiner als die arithmetische 3, die geometrische Vier grösser als die arithmetische 4, die geometrische Fünf kleiner als die arithmetische 5, die geometrische Sechs kleiner als die arithmetische 6: sieht man die geometrische Sieben d. i. die Seite des Quadrates mit der arithmetischen 7 zusammenfallen.

Die Summe aller angeführten Grössen des Quadrates, die zum Aufbaue des menschlichen Körpers verwendet erscheinen, beträgt das Quadrat der Zahl 7. Die Summen derselben Grössen, wie sie aus den nach natürlicher Zahlenreihe aufsteigenden Quadraten hervorgehen, entstehen, wie wir gesehen haben, dadurch, dass die jedesmalige Wurzel des Quadrates mit der Zahl 7 multiplicirt

wird. Die Zahl 7 kommt daher in allen diesen Summen so oft vor, als die Wurzel des Quadrates Einheiten enthält. Daraus geht nun unwiderleglich hervor, dass die Zahl 7 eine Grundzahl jenes Zahlensystemes sei, welches dem menschlichen Körperbaue vorsteht.

Recapitulirt man endlich jene Zahlen, welche das menschliche Wachsthumsgesetz und den wunderbaren Bau des menschlichen Körpers als Fundamental-Zahlen beherrschen, nämlich 7 als die Stirn-Scheitelhöhe, die Länge des Brustbeines, des Vorderarmes und Fusses beim Neugebornen; 5 als die Länge des Gesichtes von der Nasenwurzel zur Kinnspitze, des Halbmessers des Nabel- und Hüftenkreises und des Schädeldaches, sowie die halbe Diagonale des Siebner-Quadrates; 25 als die halbe Körperlänge und die Mittelzahl des Tetragrammes aus der Wurzel 7; 30 als die Oberlänge und 20 als die Unterlänge, welch' beide letztere Zahlen zugleich die grössten diagonalen Radien des magischen Siebner-Quadrates sind; $50 = 49 + 1$ als die Körperlänge des Neugebornen und die Summe der gleichen Paare im Siebner-Tetragramme; $50 \times 3^1/_2 = 175$ als die Körperlänge des erwachsenen Mannes und die Summe einer Reihe im Tetragramme; $7 \times 3 = 21$ als die Länge des Schlüsselbeines, der Hand, des Abstandes der Oberarmköpfe von einander und des geraden Kopfdurchmessers beim Erwachsenen, dann als Leitzahl im Tetragramme; betrachtet man zudem das Wachsthum des Brustbeines von 7 auf 22, des Kopfumfanges um 7×3 und des Brustumfanges um 7×9, ferner die Wachsthumszunahmen der wichtigsten Körpertheile mit 6 und 8, also mit jenen charakteristischen Zunahmen, mit welchen die Reihen der äussersten horizontalen und verticalen Streifen des Tetragrammes wachsen: so geht daraus unwiderleglich hervor, dass, obschon die Proportionalität der einzelnen Grössen der Quadrate unter einander stets dieselbe bleibt, doch nur die aus dem Siebner-Quadrate resultirenden Ziffern mit den im Wachsthumsgesetze vorkommenden Zahlen identisch sind.

Es ist daher durch dieses neu aufgestellte arithmetisch-geometrische System die schon im grauesten Alterthume ausgesprochene Ansicht „der wundervolle Bau des menschlichen Körpers sei dem Wesen des Siebner-Quadrates entnommen“ durch mathematisches Calcul als wahr erwiesen.

III. Die reale Form des Gesetzes oder seine Ziffer.

Aus den abstracten Bestimmungen der Grössenverhältnisse der einzelnen Körperabschnitte gehen nun erst jene Zahlen hervor, welche wir in den beiden Gesetztafeln *(Taf. LV Nro. 78, 79)* verzeichnet sehen. Diese Zahlen stellen fest, dass die mittlere Körperlänge des neugeborenen Knaben 50 bestimmte Maasseinheiten beträgt, welche zufolge der Identität des Centimeter mit der mittleren Rippenbreite des mittleren neugeborenen Knaben als der natürlichen Maasseinheit 50 Centimeter sind. Diese Geburtslänge $3^1/_2$mal genommen ergibt die mittlere Körperlänge von 175$^{\text{Cm.}}$ nach beendetem Wachsthume.

Da bei der Geburt die Länge des Kopfes 12, die des Halses 1, des Brustbeines 7, des Bauches 10, des Ober- und Unterschenkels zusammen 18 und die Knöchelhöhe 2$^{\text{Cm.}}$ messen, so werden diese Grössen am Ende des Wachsthumes beziehungsweise 24, 9, 22, 26, 85, 9$^{\text{Cm.}}$ betragen.

In der ersten Columne der Gesetztafel wird die abstracte Einheit der Zeit zur ersten Epoche, welche daher mit der Ziffer 1 bezeichnet erscheint. Die Zahl 1 schreitet nach den Epochen bis 24 weiter. Die drei Abschnitte werden aus den 24 Epochen so gebildet, dass die ersten 6 Epochen zum ersten, die mittleren 12 zum zweiten, die letzten 6 zum dritten Abschnitte gehören. Daher sind noch in der ersten Columne die Zahlen 6, 18, 24 als die Endzahlen der Abschnitte bemerkenswerth.

In der zweiten Columne steht die zweite Einheit, die Einheit der Zeit, das 1, welches zur genaueren Bestimmung der Zahlen der ersten Columne dient. Durch dieses 1, — beim menschlichen Wachsthume 1 Monat, der zwölfte Theil des Jahres — wird nämlich die Dauer der einzelnen Epochen näher angegeben. Die Ziffern 1, 3, 6, 10, 15, . . . bezeichnen die Anzahl der Monate in einer Epoche und bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der stetigen Differenz 1, welche durch die Zahlen 21, 171 und 300 nach den Hauptabschnitten des Wachsthumes in drei Theile abgetheilt wird. Unter den Gliedern dieser Reihe machen sich besonders die Zahlen 21 und 300 bemerkbar, erstere begränzt die Entstehung des Individuums, letztere den Abschluss seines Wachsthumes. Die drei Abschnitte dieser

Columne sind ferner so beschaffen, dass die Summe der Monate im mittleren Abschnitte mit 150 gleich ist der Summe der Monate im ersten und dritten Abschnitte zusammengenommen.

In der dritten Columne wird die Einheit der Raumbestimmung zur factischen Maasseinheit d. i. zur mittleren Rippenbreite, die 1 Centimeter gleich ist. Diese Maasseinheit ergibt nun alle concreten Zahlen für die Körpertheile, wie sie in beiden Gesetztafeln verzeichnet sind. Da aber alle diese Zahlen nur die gesetzliche, einfachste Proportionalität der Körpertheile beziffern, so sind sie wieder in Bezug auf die Individuen Grundzahlen.

Jedes specielle Wachsthum schreitet nämlich nach jenen Verhältnissen vor, in welchen die Grössen bei der Geburt und in jeder Epoche des Wachsthumes zu den Grundzahlen stehen. Es werden daher die den Individuen in jeder Epoche zukommenden Wachsthumsgrössen, sowohl des ganzen Körpers als seiner einzelnen Theile erst aus der Berechnung des ziffermässigen Verhältnisses entnommen werden müssen, in welchem die wirklichen Geburts- und jedesmaligen Wachsthumsgrössen zu den prototypen Grössen des Gesetzes stehen.

Um nun diese Berechnung zu erleichtern und zugleich einen vollgültigen Beweis für die absolute Richtigkeit des Gesetzes zu geben, wurde eine Formel entwickelt, die für jeden Zeitpunkt des Wachsthumes das richtige Resultat liefert und daher den allgemeinen Ausdruck des Gesetzes darstellt.

Die Formel des Gesetzes.

Das wichtigste Moment ist die Zeit; denn das Wachsthum geht in 24 Epochen vor sich, deren jede in ihrer Aufeinanderfolge so viele Monate, Tage, Stunden etc. enthält, als die Dreieckszahlen anzeigen.

Wäre Θ die Epoche, so ist die Zahl der Monate

$$t = \frac{\Theta(\Theta + 1)}{2} \text{ oder } \Theta = -\frac{1}{2} + \sqrt{2t + \frac{1}{4}}.$$

Da von jeder Epoche des ersten Abschnittes zur andern die Wachsthumszunahme dieselbe bleibt, und ebendasselbe mit den Wachsthumszunahmen der Fall ist, welche das Gesetz für die Epochen des zweiten und des dritten Abschnittes normirt, so muss man nebst der Zeit noch die gegebenen Längen des Neugebornen, des 21 Monate und des 171 Monate alten, endlich die des erwachsenen Menschen in Rechnung bringen, welche vier Grössen wir mit

g_1, g_2, g_3, g_4 bezeichnen wollen. Nennt man w die Grösse des Menschen zur Lebenszeit t (in Monaten als Einheiten ausgedrückt), so besteht zwischen diesen Grössen folgende Gleichung:

$$0 = [6w - (g_2 - g_1)\Theta - 6g_1]\ [12w - (g_3 - g_2)\Theta - 18g_2 + 6g_3]$$
$$[6w - (g_4 - g_3)\Theta - 24g_3 + 18g_4]$$

Werden hierin für die verschiedenen Constanten ihre Werthe eingesetzt, so wird einer der drei Factoren 0, was die ganze Gleichung gleich 0 macht. Dass z. B. der erste Factor 0 ist, wenn Θ innerhalb der ersten 6 Epochen liegt. dürfte folgende Betrachtung zeigen:

w ist die um die einzelnen Zunahmen vermehrte Geburtslänge; diese Zunahmen werden durch $(g_2 - g_1)\ \Theta$ aufgehoben, während die Geburtslänge dann einmal + einmal — bleibt, also sich aufhebt und der erste Factor 0 wird. Ebenso verhält es sich mit dem zweiten oder dritten Factor, wenn Θ im zweiten oder dritten Abschnitte liegt. Ein Beispiel dürfte die Sache klar machen:

Seien in der Columne „Brustbeinlänge“

$$g_1 = 7;\quad g_2 = 13;\quad g_3 = 21;\quad g_4 = 22;$$

mithin

$$g_2 - g_1 = 6;\quad g_3 - g_2 = 8;\quad g_4 - g_3 = 1$$

und

$$6g_1 = 42;\quad 18g_2 - 6g_3 = 108;\quad 24g_3 - 18g_4 = 108$$

so ergibt die Gleichung für die Zeit t obige Werthe eingesetzt:

$$0 = (6w - 6\Theta - 42)\,(12w - 8\Theta - 108)\,(6w - \Theta - 108)$$

1. Sei nun $t = 10$, mithin $\Theta = 4$, so zeigt die Tafel für die Brustbeinlänge $w = 11$; daher das erste Formelglied

$$6w - 6\Theta - 42 = 66 - 24 - 42 = 0.$$

2. Wenn $t = 78$ daher $\Theta = 12$ ist, so ergibt die Tafel $w = 17$; daher das zweite Formelglied

$$12w - 8\Theta - 108 = 204 - 96 - 108 = 0.$$

3. Sei endlich $t = 253$ also $\Theta = 22$, so ist nach der Tafel $w = 21\frac{8}{12}$; daher das dritte Formelglied

$$6w - \Theta - 108 = 130 - 22 - 108 = 0.$$

Auf diese Weise ist das wechselseitige Verhalten und die Richtigkeit des Gesetzes bestättigt, da die Gleichung für jeden Werth von t immer 0 wird.

Sehen wir nun von dieser Gleichung ab und versuchen eine aufzustellen, welche die Grösse des Menschen und der einzelnen Glieder zu jeder beliebigen Zeit t ergibt.

Jedes Wachsthum an und für sich zerfällt in drei Abschnitte, in welchen die Zunahmen verschieden sind.

Seien diese Abschnitte

$$\vartheta,\ \vartheta_1 \text{ und } \vartheta_2,$$

und die Wachsthumszunahmen

$$\alpha,\ \alpha_1 \text{ und } \alpha_2,$$

die Grösse bei der Geburt N, so ist bei Vollendung des Wachsthumes

$$x = N + \vartheta\,\alpha + \vartheta_1\,\alpha_1 + \vartheta_2\,\alpha_2$$

Bezeichnet man die mittlere Grösse bei der Geburt mit M und die mittleren Wachsthumszunahmen mit β; β_1; β_2 so erhält man die Wachsthumszunahme für jedes N, wenn man $\frac{\beta}{M}$; $\frac{\beta_1}{M}$; $\frac{\beta_2}{M}$ mit N multiplicirt; daher

$$\alpha = \frac{\beta}{M}N; \quad \alpha_1 = \frac{\beta_1}{M}N; \quad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{M}N$$

weshalb die obige Gleichung in nachstehende übergeht:

$$x = N + \frac{\beta}{M}N\vartheta + \frac{\beta_1}{M}N\vartheta_1 + \frac{\beta_2}{M}N\vartheta_2$$

Es erübrigt nun noch, für ϑ, ϑ_1, ϑ_2 die Werthe einzusetzen, wo dann die obige Gleichung sich so gestaltet:

$$x = N + \frac{\beta}{M}N\vartheta + N\left(\frac{\beta_1 - \beta}{M}\right)(\vartheta - 6) + N\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{M}\right)(\vartheta - 18)$$

Würden die Factoren (ϑ — 6) und (ϑ — 18) negativ, so ist dies Glied nicht in Betracht zu ziehen, da dies ein Zeichen ist, dass sich das Wachsthum noch nicht in diesem Abschnitte befinde.

Die einzelnen α, α_1 und α_2 sind aus der Gesetztafel leicht zu bestimmen. Für sämmtliche Grössen sind sie in nebenstehender Tafel aufgestellt und daraus die einzelnen Grössen nach obiger Formel leicht zu berechnen.

Sei z. B. die Länge des Neugebornen

$$40^{\mathrm{Cm.}} \text{ und } \alpha = 0{\cdot}136;\ \alpha_1 = 0{\cdot}12 \text{ und } \alpha_2 = 0{\cdot}04$$

so ist

$$x = 40 + 40 \times 0{\cdot}136\,\vartheta + 40\,(0{\cdot}12 - 0{\cdot}136)\,(\vartheta - 6) + 40\,(0{\cdot}04 - 0{\cdot}12)\,(\vartheta - 18)$$

Wenn $\vartheta = 3$ ist, wird

$$x = 40 + 16{\cdot}4 = 56{\cdot}4$$

da die übrigen Glieder wegen

$$\vartheta - 6 = -3 \text{ etc.}$$

wegfallen.

Ist $\vartheta = 12$, so wird

$$x = 40 + 65{\cdot}6 - 4 = 101{\cdot}6.$$

Endlich im dritten Abschnitte, wenn $\vartheta = 20$ wird, ist

$$x = 40 + 109{\cdot}33 - 9 - 6{\cdot}4 = 133{\cdot}93$$

Auf diese Weise kann man jede Grösse zu irgend einer beliebigen Zeit berechnen, wenn N bekannt ist, da

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2$$

gegeben sind.

Tafel der Werthe

von β, β_1, β_2.

Zeit	Hals	Kopf	Brustbein	Entfernung des Schwertknorpels von der Schoossfuge	Ober- und Unterschenkel	Von der Sohle zum Knöchel	Vom Scheitel zur Schoossfuge	Von der Schoossfuge zur Sohle	Körperlänge	Handlänge	Vorderarm	Oberarm	Von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmes	Halbe Körperlänge	Halbe Schulterbreite	Querer Kopfdurchmesser	Gerader Kopfdurchmesser	Kopf-Peripherie	Brust-Peripherie	Gerader Brustdurchmesser	Hüftenbreite
Männliches Geschlecht																					
Neugeboren	$\frac{1}{50}N$	$\frac{12}{50}N$	$\frac{7}{50}N$	$\frac{10}{50}N$	$\frac{18}{50}N$	$\frac{2}{50}N$	$\frac{30}{50}N$	$\frac{20}{50}N$	N	$\frac{6}{50}N$	$\frac{7}{50}N$	$\frac{9}{50}N$	$\frac{3}{50}N$	$\frac{N}{2}$	$\frac{5}{50}N$	$\frac{10}{50}N$	$\frac{12}{50}N$	$\frac{36}{50}N$	$\frac{36}{50}N$	$\frac{10}{50}N$	—
1. Abschnitt	$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{90}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{41}{300}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{23}{168}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{41}{600}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{108}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	—
2. Abschnitt	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{23}{108}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{180}$	$\frac{49}{240}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{39}{336}$	$\frac{13}{108}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	—
3. Abschnitt	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{144}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{72}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{20}$	—
Weibliches Geschlecht																					
Neugeboren	$\frac{1}{48}N$	$\frac{12}{48}N$	$\frac{6}{48}N$	$\frac{10}{48}N$	$\frac{17}{48}N$	$\frac{2}{48}N$	$\frac{29}{48}N$	$\frac{19}{48}N$	N	$\frac{11}{96}N$	$\frac{7}{48}N$	$\frac{9}{48}N$	$\frac{5}{96}N$	$\frac{N}{2}$	$\frac{648}{692}N$	$\frac{114}{576}N$	$\frac{138}{576}N$	$\frac{414}{576}N$	$\frac{414}{576}N$	$\frac{10}{48}N$	$\frac{138}{576}N$
1. Abschnitt	$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{87}$	$\frac{19}{114}$	$\frac{41}{288}$	$\frac{19}{132}$	$\frac{23}{168}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{41}{576}$	$\frac{95}{648}$	$\frac{7}{114}$	$\frac{8}{138}$	$\frac{28}{414}$	$\frac{36}{414}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{18}{138}$
2. Abschnitt	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{23}{102}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{174}$	$\frac{49}{228}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{35}{264}$	$\frac{39}{336}$	$\frac{13}{108}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{175}{1296}$	$\frac{3}{114}$	$\frac{3}{138}$	$\frac{4}{414}$	$\frac{24}{414}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{31}{276}$
3. Abschnitt	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{144}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{30}{648}$	$\frac{2}{114}$	$\frac{4}{138}$	$\frac{6}{414}$	$\frac{42}{414}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{8}{138}$

In meinem Werke über das Gesetz des Wachsthumes und den Bau des Menschen sind den zwei Gesetztafeln noch einige nach dieser Formel für das specielle Wachsthum der wichtigsten Körpertheile berechnete Tafeln beigegeben, in welchen man für die meisten in der Natur vorkommenden Fälle die wirkliche Wachsthumszunahme eines gemessenen Individuums während aller von ihm noch zu durchlaufenden Epochen vorfindet. Diese concreten Zahlen dienen nun dem speciellen Wachsthume zur ziffermässigen Norm; sie geben die Gränzen des Wachsthumes an, die das Individuum niemals überschreiten kann, wiewohl es von den verschiedenen Einflüssen auf sein Wachsthum abhängen wird, in wie weit dasselbe hinter der ihm zukommenden Grösse zurückbleibt.

Alle Abweichungen von dieser ziffermässigen Norm des Wachsthumes sind daher keine Ausnahmen vom Gesetze; sie sind blos die Ergebnisse eines Wachsthumes, welches durch die verschiedenen dabei thätigen Factoren gewisse Veränderungen erleidet. So wie die Wirkungen der Schwere verschieden sind, je nachdem ein Körper frei fällt oder sich auf einer schiefen Ebene bewegt, je nachdem er in der Luft oder im Wasser dem Zuge der Schwere folgt, so wird auch das specielle Wachsthum vollkommener seinem Gesetze folgen, wenn Wärme, Luft, Wasser und Nahrungsstoffe in bester Beschaffenheit zum individuellen Prozesse zusammentreten. Das allgemeine Gesetz des Wachsthumes bleibt, wie das der Schwere, unverändert und unwandelbar, und jeder anscheinend abweichende specielle Prozess selbst kann nur dadurch seinen ihm eigenthümlichen Lauf vollenden, dass er durch das Grundgesetz geleitet und beherrscht jene Abänderungen erfährt, welche erst aus dem Zusammenwirken des Gesetzes und der Factoren, die es in Erfüllung bringen, entstehen.

Die Uridee, die abstracten Bestimmungen und die Grundzahlen des Gesetzes werden aber, sowie sie seit der Schöpfung dem Wachsthume zur Richtschnur gegolten haben, so lange fortbestehen, bis der endliche Zweck der entstehenden und wachsenden Dinge erreicht sein wird.

Der goldene Schnitt.

In dem herrlichen Werke A. Zeising's über eine neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, Leipzig 1854, findet man den goldenen Schnitt als morphologisches Grundgesetz aufgestellt, welches die ganze Natur und Kunst durchdringen und die Grundlage des ganzen Weltbaues bilden soll.

Im Vorworte, *pag. V*, sagt der Verfasser: „Der menschliche Körper ist ein aus einer Uridee hervorquellender, in allen seinen Theilen und Dimensionen nach einem und demselben Grundverhältnisse gegliederter und in Mitten der unendlichen Mannigfaltigkeit seiner einzelnen Formen und der Freiheit seiner Bewegungen ein von vollkommenster Harmonie und Eurhythmie durchdrungener Organismus. In ihm ist überhaupt das Grundprincip aller nach Schönheit und Totalität drängenden Gestaltung im Reiche der Natur, wie im Gebiete der Kunst enthalten. Nach dem in ihm liegenden Gesetze sind von Uranfang an alle Formbildungen und formellen Verhältnisse, die kosmischen sowohl als auch die individualisirenden, die organischen wie die unorganischen, die akustischen wie die optischen als höchstes Ziel und Ideal gebildet. In der Menschengestalt erhielt diese Idee aber ihre vollkommenste Realisation."

Auf *pag. VI* heisst es weiter: „Auch darüber wage ich von vornherein kein Urtheil abzugeben, für welche Naturwissenschaften das Gesetz vorzugsweise von Bedeutung sein möchte. Zwar innerhalb der Botanik, rücksichtlich deren ich es einer genaueren Prüfung unterworfen habe, dürfte seine Wichtigkeit am leichtesten und sichersten erkannt werden; bei der in der ganzen Natur herrschenden Einheit und Harmonie lässt sich jedoch annehmen, dass es für keine Seite derselben ganz bedeutungslos sein und überhaupt da Aufschlüsse geben werde, wo quantitative Verhältnisse den inneren Grund vollkommener Mischungen und Combinationen bilden, und wo es sich darum handelt, die stufenweise Entwicklung gewisser Formationen zu erkennen. Möglicherweise lassen sich also von ihm in den verschiedensten Gebieten der Naturwissenschaft entweder neue Ansichten oder bestättigende Gründe für die älteren gewinnen, z. B. in der Physiologie und Anatomie über die Gesetzmässigkeit nicht blos in der äusseren, sondern auch in der inneren Construction des menschlichen und thierischen Körpers, über den Plan des Knochengerüstes, die Verzweigungen der Adern, das Gewebe der Nerven u. s. w. in der Zoologie über die fortschreitende Vervollkommnung und Stufenfolge der Thierformen; in der Botanik über den gesetzlichen Urtypus der Pflanzen und die mehr — mindere Ausprägung desselben sowohl in ihren verschiedenen Arten, wie in ihren verschiedenen Theilen z. B. den Wurzeln, dem Stamm, den Zweigen und Blättern, den Blüten und Früchten, dem Zellgewebe u. s. w.

In der *Mineralogie* über Anfang, Fortgang und Ziel der Krystallisation und die ästhetische Rangordnung der einzelnen Gebilde; in der *Chemie* über die verschiedenen Wirkungen verschiedener Mischungsverhältnisse und den verschiedenen Grad ihrer Annehmlichkeit für den Geschmack, ihrer Nährkraft, Heilkraft u. s. w.; in der *Physik* über die verschiedenen Schwingungsverhältnisse, die den verschiedenen Erscheinungen des Lichtes, des Schalles, des Magnetismus u. s. w. zum Grunde liegen; in der *Astronomie* über die Entfernung, Grösse, Umlaufszeit und anderweitigen Verhältnisse der Planeten, über die systematische *Construction* des Sonnensystemes, des *Weltgebäudes* überhaupt u. s. w.

Ganz besonders aber lässt sich von einer allseitigen Verfolgung des Gesetzes erwarten, dass sie namentlich in die einfache *Uranlage* des unendlich mannigfaltigen *Universums*, „wo Alles sich zum Ganzen webt, *Eins* in dem Andern wirkt und lebt", einen tieferen Einblick eröffnen und den überzeugendsten Beweis dafür liefern werde, *wie die weltschöpferische Kraft mit den scheinbar geringfügigsten Mitteln die erhabensten und grossartigsten Wirkungen zu Stande gebracht und aus dem Einen den Uebergang in das unendlich Viele und Verschiedenartige gefunden hat.*

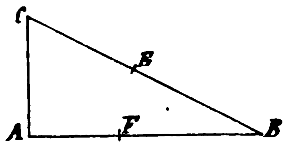
Dieser Erfolg kann aber nur erreicht werden, wenn jede Wissenschaft von ihrem Standpunkte aus das Gesetz einer speciellen und gründlichen Prüfung unterwirft und die Ergebnisse der Beobachtung und Erfahrung mit den aus ihm folgenden Bestimmungen vergleicht. Natürlich wird man dabei nie eine vollkommene Uebereinstimmung der einzelnen realen Erscheinungen mit dem Gesetze erwarten und verlangen können: denn jede *einzelne* Erscheinung ist als solche nothwendig im gewissen Grade unvollkommen und kann daher dem Gesetze nicht in jeder Beziehung entsprechen; ja sie vermag sogar den *Schein* der Vollkommenheit nur dadurch zu erreichen, dass sie sich in gewissem Grade vom Gesetze des Ganzen losreisst und ihrer Particularität und Abhängigkeit das Gepräge einer eigenthümlichen Totalität und Freiheit aufdrückt. Das Gesetz wird daher überall nur als der *ideale Urtypus* oder normale Maassstab anzusehen sein, dem sich die reale Bildung bald mehr bald minder nähert."

Diese Sätze sind wortgetreu angeführt, weil sie mit meiner Anschauungsweise vollständig übereinstimmen, weil die Resultate meiner Forschung dieselben durchaus bestättigen und ich dieselben nicht präciser auszudrücken im Stande wäre.

Das Grundgesetz der richtigen Proportionalität alles Bestehenden lautet nach Zeising: „Wenn die Eintheilung eines Ganzen in ungleiche Theile als proportional erscheinen soll, so muss sich der kleinere Theil zum grösseren rücksichtlich seines Maasses eben so verhalten, wie der grössere zum Ganzen.

Dieses anerkannte Grundgesetz der Proportionalität: „Das Verhältniss der ungleichen Theile muss dasselbe sein, wie das Verhältniss der Theile zum Ganzen“ — welche Theilung im äusseren und mittleren Verhältnisse auch der „goldene Schnitt“ genannt wird, setzt uns in den Stand, dadurch, dass dasselbe auf den Menschen angewendet wird, dessen proportionale Verhältnisse genauer zu betrachten.

Eine Linie wird im äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt, wenn man sich mit den Linien z. B. a und $\frac{a}{2}$ als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck bildet, dessen Hypotenuse dann $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ ist, und von dieser Hypotenuse $\frac{a}{2}$ abschneidet und den Rest auf a überträgt. Wäre die Linie $AB = a$ derart zu theilen



so errichte man in einem Punkte z. B. A eine senkrechte $AC = \frac{a}{2}$ und man erhält die Hypotenuse $BC = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Schneidet man nun von BC von C aus die Linie $CE = AC$ ab, so erhält man

$$EB = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Trägt man die EB auf AB auf, so dass $BF = BE$, so ist

$$AF = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = a\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]$$

und das Verhältniss $AF : BF = BF : AB$

oder

$$a\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right] : \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) : a$$

oder

$$\frac{a\left[1-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right]}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}=\frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{a}$$

Reducirt

$$\frac{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}=\frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{a};\quad \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

und

$$2(3-\sqrt{5})=(\sqrt{5}-1)^2=5+1-2\sqrt{5},$$

woraus

$$6-2\sqrt{5}=6-2\sqrt{5}.$$

Diese mathematischen Sätze wurden auf die Dimensionsverhältnisse der menschlichen Gestalt in ihrer stufenweisen Entwicklung angewendet, um zu sehen, ob nicht gewisse Körperabschnitte, welche das Gesetz als hervorragende und wichtige bezeichnet, im Verhältnisse des goldenen Schnittes zu einander stehen, und in welchen Zeitmomenten sie sich von diesem Verhältnisse zu entfernen scheinen. Zu diesem Behufe wurden die mittleren Körperlängen beider Geschlechter in ihrem stufenweisen Wachsthume im äusseren und mittleren Verhältnisse zerlegt und hierauf in den Gesetztafeln jene Abschnitte der Körperlänge aufgesucht, welche den durch den goldenen Schnitt berechneten möglichst nahe kommen. Die Zusammenstellung der beiderseitigen Zahlen ist auf nachstehenden zwei Tafeln enthalten:

Goldener Schnitt.

Männliches Geschlecht.

Epochen	Ende der Epochen in Monaten	Major	Minor	Körperlänge	Von der Sohle zum Schwertknorpel	Vom Schwertknorpel zum Scheitel
Neugeboren		30·902	19·098	50	30	20
1	1	35·125	21·7083	$56^{10}/_{12}$	$34^{2}/_{12}$	$22^{8}/_{12}$
2	3	39·348	24·3186	$63^{8}/_{12}$	$38^{4}/_{12}$	$25^{4}/_{12}$
3	6	43·571	26·9289	$70^{6}/_{12}$	$42^{6}/_{12}$	28
4	10	47·794	29·5392	$77^{4}/_{12}$	$46^{8}/_{12}$	$30^{8}/_{12}$
5	15	52·017	32·1495	$84^{2}/_{12}$	$53^{10}/_{12}$	$33^{4}/_{12}$
6	21	56·24	34·76	91	55	36
7	28	59·9483	37·0517	97	$59^{5}/_{12}$	$37^{3}/_{12}$
8	36	63·6565	39·3435	103	$64^{6}/_{12}$	$38^{6}/_{12}$
9	45	67·3648	41·6352	109	$69^{3}/_{12}$	$39^{9}/_{12}$
10	55	71·073	43·927	115	74	41
11	66	74·7813	46·2187	121	$78^{9}/_{12}$	$42^{3}/_{12}$
12	78	78·4895	48·5105	127	$83^{6}/_{12}$	$43^{6}/_{12}$
					Von der Sohle zum Nabel	Vom Nabel zum Scheitel
13	91	82·1978	50·8022	133	$77^{11}/_{12}$	$55^{1}/_{12}$
14	105	85·906	53·094	139	$82^{4}/_{12}$	$56^{8}/_{12}$
15	120	89·6143	55·3857	145	$86^{9}/_{12}$	$58^{3}/_{12}$
16	136	93·3225	57·6775	151	$91^{2}/_{12}$	$59^{10}/_{12}$
17	153	97·0308	59·9692	157	$95^{7}/_{12}$	$61^{5}/_{12}$
18	171	100·739	62·261	163	100	63
19	190	101·9752	63·0248	165	$101^{2}/_{12}$	$63^{10}/_{12}$
20	210	103·2114	63·7886	167	$102^{4}/_{12}$	$64^{8}/_{12}$
21	231	104·4476	64·5524	169	$103^{6}/_{12}$	$65^{6}/_{12}$
22	253	105·6838	65 3162	171	$104^{8}/_{12}$	$66^{4}/_{12}$
23	276	106·92	66.08	173	$105^{10}/_{12}$	$67^{2}/_{12}$
24	300	108·1562	66·8438	175	107	68

Goldener Schnitt.

Weibliches Geschlecht.

Epochen	Ende der Epochen in Monaten	Major	Minor	Körperlänge	Von der Sohle zum Schwertknorpel	Vom Schwertknorpel zum Scheitel
Neugeboren		29·66	18·34	48	29	19
1	1	33 8841	20·9492	$54^{10}/_{12}$	$33^{2}/_{12}$	$21^{8}/_{12}$
2	3	38·1082	23·5584	$61^{8}/_{12}$	$37^{4}/_{12}$	$24^{4}/_{12}$
3	6	42·3323	26·1676	$68^{6}/_{12}$	$41^{6}/_{12}$	27
4	10	46·5564	28·7768	$75^{4}/_{12}$	$45^{8}/_{12}$	$29^{8}/_{12}$
5	15	50·7805	31·386	$82^{2}/_{12}$	$49^{10}/_{12}$	$32^{4}/_{12}$
6	21	55·0048	33 9952	89	54	35
7	28	58·713	36·287	95	$58^{9}/_{12}$	$36^{3}/_{12}$
8	36	62·4212	38·5788	101	$63^{6}/_{12}$	$37^{6}/_{12}$
9	45	66·1294	40·8706	107	$68^{3}/_{12}$	$38^{9}/_{12}$
10	55	69·8376	43·1625	113	73	40
11	66	73·5458	45·4543	119	$77^{9}/_{12}$	$41^{3}/_{12}$
12	78	77·254	47·746	125	$82^{6}/_{12}$	$42^{6}/_{12}$
					Von der Sohle zum Nabel	Vom Nabel zum Scheitel
13	91	80·9622	50·0379	131	$76^{11}/_{12}$	$54^{1}/_{12}$
14	105	84·6704	52·3298	137	$81^{4}/_{12}$	$55^{8}/_{12}$
15	120	88·3786	54·6216	143	$85^{9}/_{12}$	$57^{3}/_{12}$
16	136	92·0868	56·9134	149	$90^{2}/_{12}$	$58^{10}/_{12}$
17	153	95·795	59·205	155	$94^{7}/_{12}$	$60^{5}/_{12}$
18	171	99·503	61·497	161	99	62
19	190	100·739	62·261	163	$100^{2}/_{12}$	$62^{10}/_{12}$
20	210	101·9752	63·0248	165	$101^{4}/_{12}$	$63^{8}/_{12}$
21	231	103·2114	63·7886	167	$102^{6}/_{12}$	$64^{6}/_{12}$
22	253	104·4476	64·5524	169	$103^{8}/_{12}$	$65^{4}/_{12}$
23	276	105·6838	65·3162	171	$104^{10}/_{12}$	$66^{2}/_{12}$
24	300	106·92	66·08	173	106	67

Die Vergleichung der nebeneinander stehenden Zahlen ergab folgende Resultate:

1. Die Körperlänge der Neugebornen beiderlei Geschlechts wird durch den Schwertknorpel sehr nahe nach dem goldenen Schnitt getheilt, so dass der Abschnitt von der Sohle zum Schwertknorpel den Major, der Abschnitt vom Schwertknorpel zum Scheitel den Minor abgibt.

2. In den zwölf ersten Perioden steigt der Theilungspunkt zwischen Major und Minor immer weiter herab, nähert sich also immer mehr dem Nabel, so dass von der 13. Epoche an die Theilung der Körperlänge in die Abschnitte: von der Sohle zum Nabel als Major, und vom Nabel zum Scheitel als Minor dem goldenen Schnitte näher steht als die frühere Theilung.

3. In der 18. Epoche endlich rückt der Theilungspunkt des goldenen Schnittes sehr nahe an den Nabel, von welchem er sich im Laufe der letzten Epochen wieder um etwas, obwohl nur um Weniges entfernt.

Bedeutung der magischen Quadrate

für die Mathematik.

Die Einheit.

Die Arithmetik fängt mit der Einheit zu zählen an und denkt sich eine fortwährende Wiederholung derselben, wodurch die endlose natürliche Zahlenreihe entsteht.

Das graueste Alterthum hat die Frage aufgeworfen: Vor Eins was zählest du? — Die Antwort lautete: Nichts, oder das der Einheit als dem ersten Bestimmten vorangehende Unbestimmte. Dieser Begriff ohne Inhalt, der aber ein Postulat des Verstandes zu sein scheint, wurde mit O, der Figur des Kreises bezeichnet, seine erste und wichtigste Bestimmung, der senkrechte Durchmesser (|) wurde die Einheit (1) genannt.

Der Kreis hat keinen Anfang und kein Ende; er stellt daher am besten das Unbestimmte dar. Durch ihn aber als dem Unbestimmten wird die Linie begränzt, welche sein Durchmesser ist, es entsteht das Bestimmte.

Die Einheit, unendlich klein gedacht, lässt keine Theilung zu, sie ist daher untheilbar, einfach, ein Ganzes. In der Arithmetik suchte man diesen Begriff dadurch zu erklären, dass man sagte: die Einheit ist selbst ihre Wurzel, ihr Quadrat und ihr Cubus, sie gibt mit sich multiplicirt oder durch sich dividirt immer wieder sich selbst, die Einheit.

Im Mittelpunkte ihres magischen Quadrates gedacht, stellt sie die Reihe

$\boxed{1}$

nach oben und unten, nach rechts und links dar, sie gibt sich immer selbst und trägt daher alle Merkmale des magischen Quadrates an sich, ist gleichsam Alles in Allem.

In dieser ihrer quadratischen Einheit ist sie zugleich die Maasseinheit aller Tetragramme, deren eigentliches Wesen, Gleichartigkeit und Verschiedenheit sie bildet; sie ist bei der geometrischen Construction dasselbe was das Eins in der Zahl. Sie bleibt auch in allen magischen Quadraten ungeändert, da sie stets denselben Platz behauptet und nirgends von den übrigen Zahlen verdrängt wird.

In den Quadraten aus ungerader Wurzel steht sie immer unmittelbar unter dem Mittelfelde, in jenen aus gerader Wurzel hingegen im rechten oberen Eckfelde, während „Zwei“ und alle folgenden Zahlen in den Quadraten aus geradgerader Wurzel ein anderes Feld einnehmen, als in den Quadraten aus ungeradgerader Wurzel.

Die Einheit ist die Führerin und Ausgleicherin aller Zahlen, sie macht das Ungerade gerade und das Gerade ungerad.

Das Grundgesetz aller magischen Quadrate beruht auf der Gruppirung der einzelnen Zahlen zu Paaren, welche dieselbe Summe ergeben.

Die Einheit zum Quadrate hinzutretend eröffnet diesen Reigen und macht dadurch das Quadrat aus ungerader Wurzel zur geraden, das Quadrat aus gerader Wurzel zur ungeraden Zahl. In allen Formeln, welche die einzelnen Felder aller magischen Quadrate bezeichnen, ist es die hinzutretende Einheit, welche die ungerade Zahl theilbar macht und so einen in ganzen Zahlen ausgedrückten Werth ergibt.

Die Differenzen in den arithmetischen Reihen der verschiedenen Tetragramme sind entweder die Einheit oder die Wurzel oder die um die Einheit vermehrte oder verminderte Wurzel. Indem die Einheit als der Anfang zum Quadrate als dem Ende hinzutritt, entsteht bei den Tetragrammen mit ungerader Wurzel durch die Halbirung die Mitte. Z. B. beim Siebener-Tetragramme: $\frac{1+49}{2} = 25$

Die Einheit zeigt ihre Wichtigkeit und Macht auch in der Formel für die Leitzahl der Tetragramme $\frac{w(w-1)}{2}$, so wie sie der Bestimmungsgrund jener Formel ist, welche den Werth der einzelnen Felder in den modificirten Tetragrammen ausdrückt. Diese Formel lautet, wie wir gesehen haben $a + (n - 1)d$, wobei a das erste Glied, n das n^{te} Glied, d die Differenz ist. Fängt nun die arithmetische Reihe, wie dieses bei allen Grund-Tetragrammen der Fall ist, mit 1 an, so heisst die Formel $1+(n-1)d$, d. h. die Einheit ist diejenige bekannte oder bestimmte Grösse, welche positiv und negativ das Wesen dieser Bestimmung ausmacht.

Die Zahl „Zwei."

Indem die Einheit einmal aus sich heraustritt und zur Zweiheit wird, verliert sie ihre Vollkommenheit. Sie wird dadurch zur ersten geraden Zahl und als solche schon deswegen unvollkommen, weil aus ihr kein magisches Quadrat gebildet werden kann. Das Quadrat von 2 ist 4; theilt man nun ein geometrisches Quadrat in 4 gleiche Felder, so lassen sich die Ziffern 1, 2, 3, 4

2	1
4	3

auf keine Weise in die einzelnen Felder derart vertheilen, dass sie durch ihre Stellung den Bedingungen eines magischen Quadrates vollkommen entsprechen. Wohl nehmen die Einheit, die Wurzel und das Quadrat die vom Gesetze bestimmten Felder ein und auch die beiden Diagonalen zeigen dieselbe Summe nämlich 5, welche ebenfalls aus dem Zusammentreten der Einheit zum Quadrate wie bei allen Tetragrammen entsteht, aber weder die verticalen noch die horizontalen Streifen ergeben die Summe 5 und erfüllen daher nicht die grundsätzlichen Bedingungen des magischen Quadrates; ein solches kann daher aus der Wurzel 2 nicht hergestellt werden.

So wie „Zwei“ die erste vollkommen theilbare Zahl ist, so ist sie auch die erste und wichtigste Theilungszahl. Sie ist die Vorsteherin des Paarigen, welches in allen Tetragrammen und überall in der Natur aufgefunden wird. Durch sie werden die Gegensätze bezeichnet, auf welchen alle Bewegung beruht. Sie ist der Urgrund des Dualismus im Weltall.

Dieselbe Rolle sehen wir sie auch bei den Tetragrammen spielen, welche durch sie in zwei Hauptgruppen zerfallen, in Tetragramme aus ungerader und aus gerader Wurzel. Letztere Gruppe zerfällt abermals durch ihre Theilung in Tetragramme aus gerad-gerader und aus ungerad-gerader Wurzel.

Alle Tetragramme gerader Wurzel werden durch „Zwei“ so halbirt, dass sie in eine obere und untere, oder in eine rechte und linke Hälfte zerfallen, die einander stets gleich sind. Diese Hälften theilen sich abermals in je zwei einander gleiche Theile, welche obige Eigenschaft besitzen.

Die Zahl „Drei.“

„Drei“ ist die erste ungerade Zahl; sie wurde die erste vollkommene Zahl genannt, weil sie Anfang, Mitte und Ende habe. Sie ist deshalb vollkommen, weil sie die Erste befähigt ist, durch ihr Quadrat ein Tetragramm zu bilden. Sie ist die Führerin aller ungeraden Zahlen, da sie die abgeschlossene und präcise Form aufstellt, nach welcher alle Tetragramme aus ungerader Wurzel gebildet werden, und da sie die Reihe der Tetragramme eröffnet, so ist sie ihre Einheit, ihr Grundprincip, Maass und Vorbild. Also sehen wir auch hier die Trias zur Einheit eines eigenen Zahlensystems werden.

Ihren Anfang, ihre Mitte und ihr Ende zeigt die ungerade Zahl in den aus ihr gebildeten Tetragrammen darin, dass sowohl ihre senkrechte als ihre wagrechte Mittelreihe zu beiden Seiten durch eine gleiche Anzahl von Reihen eingeschlossen ist. Daher zerfallen alle Tetragramme aus ungerader Wurzel in drei Theile, nämlich in die Mitte und in die Streifen zu beiden Seiten der Mitte.

Die Localisation der Zahlen in solchen Tetragrammen beginnt, wie wir gesehen haben, entweder in der Mitte mit der Einheit und geht durch den äusseren Umkreis wieder zur Mitte, zum Quadrate als dem Ende zurück,

oder sie fängt im äussersten Rahmen an, und endigt centripetal vorschreitend in der Mitte. Also hat die Mitte als Mittelzahl unter sich den Anfang, die Einheit, über sich das Ende, das Quadrat, neben sich die Wurzel und enthält daher in sich als die Trias die Einheit, die Wurzel und das Quadrat als das Band des Ganzen. Diese Localisation ist in jedem Falle so genau von Aussen nach Innen bestimmt und begränzt, dass nirgends unendliche Reihen entstehen können. Da nun die ungerade Zahl in sich abgeschlossen ist und keine Erweiterung über ihre Gränzen zulässt, sondern in sich und durch sich ihre Gränze findet, so verdient sie mit Recht den Namen der vollkommenen und begränzten.

Die Gruppirung der Zahlen in den Tetragrammen aus ungerader Wurzel ist ferner eine kreisförmige, weil die gleichen Paare eines jeden Quadrates aus ungerader Wurzel vollkommen symmetrisch an den Endpunkten je eines Durchmessers der magischen Kreise stehen und am Mittelpunkte des Kreises ihren Anfang und ihr Ende haben. Da nun der Kreis die vollkommenste geometrische Figur ist und das Tetragramm aus der Zahl 3 die Kreis-Construction in grösster Vollkommenheit ergibt, so ist es klar, warum diese Zahl in so hohen Ehren gehalten wurde. Das Alterthum wusste ihr Wesen nicht besser zu bezeichnen, als indem es aussprach, dass drei Linien im Dreiecke zuerst eine Fläche begränzen, dass das Dreieck die Maasseinheit aller geometrischen Formen sei, dass der Kreis aus Mittelpunkt, Halbmesser und Peripherie, also aus „Drei" bestehe, und dass die gerade Linie, die Peripherie und das Dreieck, ihrem innersten Wesen nach identisch seien.

Zur Zahl 3 stehen in besonderen Beziehungen 5 als ihre Mitte, 9 als ihr Quadrat, 15 als die Summe einer Reihe, und 45 als die Summe aller Zahlen im Tetragramme. Zur Leitzahl hat die Drei sich selbst, sie ist also auch die Führerin ihres eigenen Tetragrammes, ihrer selbst, was bei keiner anderen Zahl der Fall ist.

Die Zahl „Vier"

ist die erste gerad-gerade Zahl, aus welcher ein vollständiges Tetragramm gebildet werden kann, so wie sie die Anzahl der Linien bezeichnet, aus welchen ein Quadrat besteht. Die Construction des magischen Quadrates aus „Vier", so wie aus allen geraden Wurzeln zeigt, dass nicht Ein Centralfeld den Mittelpunkt eines solchen Quadrates bilde, sondern, dass in einem solchen Tetragramme

vier Felder den Kern desselben ausmachen, aus welchen sich dann centrifugal alle übrigen Felder und Zahlen entwickeln.

Diese Form der geometrischen Construction, welche eine viel weniger symmetrische Gruppirung der einzelnen Quadratfelder um die Mitte zulässt, ist daher eine unvollkommenere als die aus ungerader Wurzel hervorgegangene. Die Vertheilung der Zahlen geht hier von den vier Mittelfeldern aus und schreitet centrifugal nach aussen vor, so dass immer ein inneres Quadrat den Kern eines anderen aus höherer Wurzel gebildeten abgibt. Da nun diese Bildung vom Centrum gegen die Peripherie in der unendlichen Zahlenreihe keine Gränzen findet, so wurde die gerade Zahl nicht blos die unvollkommene, sondern auch die unbegränzte genannt.

Ihre Unvollkommenheit besteht ferner darin, dass sie keine Mittelzahl besitzt, weil bei ihr die zum Quadrate gefügte Einheit keine durch 2 theilbare Zahl ergibt. Dieses die Ursache, warum die Leitzahl aller Tetragramme nicht die Mittelzahl sein kann, sondern warum sie eine andere sein müsse, nämlich jene, die den Werth $\frac{w(w-1)}{2}$ hat; da diese immer eine ganze Zahl sein muss und sich dadurch erst zur Führerin dieses merkwürdigen Zahlensystems eignet. Unvollkommen ist ferner die gerade Zahl auch deshalb, weil die den Quadraten aus gerader Seitenzahl eingezeichnete Kreis-Construction viel unsymmetrischer ist, als jene bei den Quadraten mit ungerader Seitenzahl. Während nämlich die Durchmesser bei den ungeraden Quadraten sich viermal im rechten Winkel schneiden, geschieht dieses bei geraden Quadraten nur zweimal. Die Radien der geraden Quadrate umspannen nicht das ganze Quadrat, und die Ungleichheit der Winkel, die durch die verschiedenen Halbmesser entstehen, ist in den Tetragrammen aus gerader Wurzel eine viel stärkere als bei jenen aus ungerader Wurzel.

Dasselbe gilt auch von der Art der Vertheilung der Zahlen an den Enden der Durchmesser; bei Tetragrammen aus gerad-gerader Wurzel fällt die dabei obwaltende Symmetrie auf den ersten Blick in die Augen, nicht so aber bei den Tetragrammen aus ungerad-gerader Wurzel, wo sie sich von jener Symmetrie in den meisten Feldern so weit entfernt, dass die paarigen Zahlen statt an den Enden eines und desselben Durchmessers, also abwechselnd in den beiden Kreishälften, sehr oft in denselben Halbkreis zu stehen kommen.

Aus allen diesen Eigenthümlichkeiten der geraden Zahlen entsteht zuletzt auch die Unvollkommenheit der algebraischen Form, durch welche das Gesetz ihrer Tetragramme seinen Ausdruck findet. Die Formeln sind nämlich hier complicirter als die für die Tetragramme aus ungerader Wurzel, und daher ist ihre Anwendung, um aus ihnen ein concretes arithmetisches Gesetz aufzustellen, wegen der in ihnen vorkommenden unendlichen Reihen viel schwieriger.

Dieses gilt besonders von den ungerad-geraden Zahlen, welche an dem Anfange ihrer Formelketten, der stets in der Mitte ihres magischen Quadrates steht, sehr grosse, wenn auch nur scheinbare Unregelmässigkeiten zeigen. Diese Unvollkommenheit charakterisirt sich dadurch, dass dreizehn Glieder einer solchen Kette erforderlich sind, um sie durch die dritte Wiederholung ihrer Einzelnausdrücke allgemein gültig zu machen, damit auf solche Weise die Formelkette zum mathematischen Gesetze erhoben werde.

Die einzelnen Streifen solcher aus ungerad-gerader Zahl entstandenen Tetragramme enthalten nicht durchwegs fortlaufende arithmetische Reihen, sondern man findet in einigen derselben, besonders in den Diagonal-Streifen gewisse Unterbrechungen, die eben in der eigenthümlichen Form der geometrischen Construction begründet sind. Man kann zwar in einem jeden einzelnen solchen Tetragramme diese Unregelmässigkeit durch eine gewisse Abänderung der Localisation der Zahlen ausgleichen, dadurch würde aber wieder eine andere Unvollkommenheit dieser Tetragramme entstehen, welche eine noch viel grössere genannt werden müsste, da dann eine Unterbrechung und Vernichtung jener arithmetischen Reihen zweiter Ordnung herbeigeführt würde, die in den gleichsituirten Feldern der nach natürlicher Zahlenreihe aufsteigenden Tetragramme enthalten, das eigentliche Wesen und die mathematische Wichtigkeit der Tetragramme ausmachen.

Deshalb muss man die obenangeführte, den ungerad-geraden Zahlen eigenthümliche Unregelmässigkeit bestehen lassen und dieselbe als eine ihnen nothwendig zukommende Eigenschaft und Unvollkommenheit hinnehmen.

Betrachtet man endlich die Längen der Radien der magischen Kreise, wie sie in den magischen Quadraten aus gerader Zahl vorkommen, so sieht man, dass in den aus ihren Grössenbestimmungen entstandenen arithmetischen Reihen hie und da ein Glied fehlt und dass diese Lücken immer häufiger werden,

je grösser die Zahl unter dem Wurzelzeichen ist, weshalb diese Unvollkommenheit mit der zunehmenden Grösse des aus gerader Zahl entstandenen Quadrates ebenfalls zunimmt.

Waren daher, wie ich nicht zweifeln kann, alle diese Eigenschaften der geraden Zahlen dem Alterthume bekannt; so wird es erklärlich, warum dieselben die Benennung der unbegränzten und unvollkommenen erhalten hatten.

Die wichtigsten Zahlen des Vierer-Tetragrammes sind ausser der Einheit das Quadrat 16, die Leitzahl 6, die Summe einer Reihe 34, die Totalsumme 136, die Differenzen der Reihen 3 und 5.

Die Zahl „Fünf“

ist die erste ungerade Zahl, in deren Tetragramm wir die constanten Differenzen der in den horizontalen und verticalen Randstreifen stehenden Progressionen deutlich ersehen. Diese Differenzen sind für die horizontalen Reihen $w-1$, für die verticalen $w+1$, also im Tetragramme aus 5 bezüglich 4 und 6.

Die Zahl Fünf nannte man die sich selbst zeugende, weil alle Potenzen derselben an der Stelle der Einer 5 zeigen. Dieselbe Eigenschaft haben im Tetragramme das Quadrat 25, die Summe einer Reihe 65 und die Summe aller Zahlen 325. Ihre Leitzahl ist 10, die Mittelzahl 13.

Die Zahl Fünf wurde, wie wir bei den Pythagoräern gesehen haben, in ein eigenthümliches Verhältniss zur Zahl Sieben gestellt und letztere als mittlere Proportionale zwischen ihr und der Zahl Zehn betrachtet. Nimmt man nun die Seite eines Quadrates gleich 7 an, so verhält sie sich zur Diagonale wie 7 : 10, daher zur halben Diagonale wie 7 : 5. Nimmt man aber die Seite des Quadrates gleich 5, so steht sie zur Diagonale in dem Verhältnisse 5 : 7. Da aber aus dem Verhältnisse zweier Linien, die sich zu einander wie 5 : 7 verhalten, alle nur denkbaren Grössen, die in ganzen Zahlen ausgedrückt sind, abgeleitet werden können, so ist es klar, welch' hohen Werth diese Grössenbestimmungen bekommen mussten, sobald ihre Natur und Abstammung erkannt worden war.

Die Zahl „Sechs“

ist als die erste ungerad-gerade Zahl die Führerin aller Zahlen dieser Gruppe. Sie gibt die Flächenzahl des Cubus an und beziffert die Anzahl der gleichen

Theile, in die der Kreis durch seinen Halbmesser getheilt wird. Ihr Wesen hängt daher auf das innigste mit dem Cubus und dem Kreise zusammen, sie scheint die Vermittlerin beider zu sein. Im dodekadischen Zahlensysteme spielt sie dieselbe Rolle wie der Fünfer im dekadischen, nur mit dem Unterschiede, dass sie eine gerade Zahl ist.

Sie ist darin der Zahl Fünf ähnlich, dass ihre Potenzen an der Stelle der Einer sie selbst zeigen.

Ihre wichtigsten tetragrammatischen Zahlen sind: die **Einheit**, das Quadrat 36, die Leitzahl 15, die Summe einer Reihe 111, die Totalsumme 666, die Differenzen der Reihen 5 und 7.

Die Zahl „Sieben"

war bei den Pythagoräern die heiligste und geheimnissvollste Zahl; sie hatte in den Orakeln einen so ehrwürdigen und erhabenen Ruhm, dass sie unter allen in der Dekade enthaltenen Zahlen ein besonderes und Ausnahmsverhältniss vor den übrigen hat.

Sie ist die einzige Zahl innerhalb der Dekade, die weder Factor noch Product ist. Sie ist die mittlere arithmetische Proportionale zwischen 4 und 10,

$$4 - 7 = 7 - 10;$$

und die mittlere geometrische Proportionale zwischen 5 und 10, sobald das Verhältniss in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll.

$$5 : 7 = 7 : 10.$$

Betrachtet man nämlich das Quadrat, welches mit einer Seite errichtet ist, die sieben Einheiten enthält, so ergeben fünf solche Einheiten die halbe Diagonale so annähernd genau, dass der Correctionsfehler, um einen Ausdruck in ganzen Zahlen zu erlangen, sehr klein ist. Wir sehen ihn fast ganz ausgeglichen, wenn man eine Seite des magischen Siebener-Quadrates statt in 49 in 50 Theile abtheilt und mit diesen Theilen die Diagonale misst. Dieses ist thatsächlich der Fall in jenem magischen Siebener-Quadrate, in welchem der Neugeborene mit seiner gesetzlichen Grösse von $50^{\mathrm{Cm.}}$ steht, während die Seite des magischen Quadrates blos 49 Einheiten zählt, wenn die Seite eines Quadratfeldes in 7 gleiche Theile getheilt wird. Die Berechnung hat nun ergeben, dass der Fehler sehr klein ist, wenn man mit dem 50theiligen Maassstab die Hypotenuse des Einzeln-Quadrates misst, welche dann sehr nahe in ganzer Zahl mit 10 ausgedrückt erscheint.

Nebst dieser Eigenschaft, die mittlere Proportionale am vollkommensten in ganzen Zahlen auszudrücken, hat die Zahl 7 noch eine andere Eigenthümlichkeit, wodurch sie sich auf den ersten Blick von allen andern unterscheidet. In dem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke, der Hälfte eines Quadrates, welches alle Maasse zur Construction der menschlichen Gestalt enthält, ergeben die Seiten, wenn die Kathete gleich 7 ist, und ihre Abschnitte, die durch das Uebereinanderlegen der Seiten entstehen, alle Grössen von 1—10. Dadurch sind die proportionalen Linien des Siebener-Quadrates für die Geometrie dasselbe, was die Dekade der Einheiten für das Zahlensystem ist.

Die tetragrammatischen Grundzahlen des Siebeners sind: die Einheit, das Quadrat 49, die Leitzahl 21, die Mittelzahl 25, die Summe einer Reihe 175, die Totalsumme 1225; die Differenzen der Reihen sind hier 1, 6, 7, 8. Die Summe der gleichen Paare ist 50.

Die Zahl „Acht."

Die charakteristischen Zahlen des Achter-Tetragrammes sind ausser der Einheit das Quadrat 64, die Leitzahl 28, die Summe einer Reihe 260, die Summe aller Zahlen 2080. Die Differenzen der Progressionen sind 7 und 9.

Die Zahl „Neun."

Die Grundzahlen des aus „Neun" construirten Tetragrammes sind: die Einheit, das Quadrat 81, die Mittelzahl 41, die Leitzahl 36, die Summe einer Reihe 369, die Summe aller Zahlen 3321; die Differenzen der Reihen sind 8, 9, 10.

Die Zahl „Zehn"

ergibt als Stellenwerth im dekadischen Zahlensysteme durch ihr Quadrat die Einheit der dritten Stelle und durch ihren Cubus die Einheit der vierten Stelle. Ihre Leitzahl ist 45, die Summe einer Reihe 505, die Summe aller Zahlen 2525, die Differenzen ihrer Reihen 9 und 11.

Die Zahl „Eilf."

Die wesentlichen Zahlen des Tetragrammes aus der Zahl „Eilf" sind ausser der Einheit das Quadrat 121, die Mittelzahl 61, die Leitzahl 55, die

Summe einer Reihe 671, die Summe aller Zahlen 7381, die Differenzen 10 und 12.

Die Zahl „Zwölf."

In dem Tetragramme dieser Zahl nehmen nebst der Einheit und der Wurzel das Quadrat 144, die Leitzahl 66, die Summe einer Reihe 870, die Summe aller Zahlen 10440 die hervorragenden Stellen ein. Die Differenzen der Reihen sind 11 und 13.

Verhalten der Zahlen zur Geometrie.

Da die charakteristischen Zahlen der magischen Quadrate aus der geometrischen Construction der Quadrate hervorgehen, so müssen sie mit dieser in einer bestimmten Relation stehen und durch die Geometrie ebenso ihre Erklärung finden, wie die Geometrie den Ausdruck ihres Wesens und Inhaltes nur durch die Zahlen erhalten kann.

Um wie viel aber die Zahlen den geometrischen Figuren an Bestimmtheit und Genauigkeit des Ausdruckes nachstehen, sieht man schon am Pythagoreischen Lehrsatze, der geometrisch jedesmal absolut genau aufgestellt werden kann, während die ziffermässige Bestimmung dieses Satzes unvollkommen erscheint, weil in den meisten Fällen die Summe der Quadrate beider Katheten keine rationale Wurzel ergibt.

Wir sehen, dass die Construction der menschlichen Gestalt mittelst der im Siebener-Quadrate enthaltenen Linien durchaus keiner Schwierigkeit unterliegt, da die Linien überall vollkommen bestimmt und begränzt sind. Die für sie eingesetzten irrationalen Zahlen aber ergeben schon an und für sich nicht mehr mit absoluter Genauigkeit die Grösse der zu bestimmenden Linien, und diese Ungenauigkeit ihres Ausdruckes wird noch mehr gesteigert, wenn mehrere irrationale Grössen von einem Maassstabe abgelesen und zu einem bestimmten Constructionszwecke aufgetragen werden sollen. Man sieht hier in einem praktischen Falle, warum die arithmetischen Werthbestimmungen, die Zahlen, viel unvollkommener und unverlässlicher sind, als die geometrischen, die Linien.

In den geometrischen Figuren sind ferner durch die Form und Zusammenstellung der Linien gewisse Wahrheiten sinnlich dargestellt, die erkannt werden,

wenn man die gegenseitigen Verhältnisse der eine Figur zusammensetzenden Linien näher prüfet. Diese Prüfung geschah anfangs gewiss nur durch Maassstab und Zirkel, bis man im Stande war, aus den auf solche Weise erhaltenen Sätzen sogenannte Axiome aufzustellen. Um aber diese Verhältnisse und Axiome dem beurtheilenden Verstande zuzuführen, mussten die Zahlen zu Hilfe genommen werden. Diese aber, ihrem Wesen nach, dem Auge nicht zugänglich, sind abstracte Bestimmungen und haben daher schon deshalb keinen so deutlich erkennbaren Inhalt als die geometrischen Figuren, die nicht allein vom Verstande, sondern auch vom Auge geprüft und bis zu einem gewissen Grade erkannt und gefasst werden können.

Aus dieser doppelten Prüfung sind nun gewisse Eigenthümlichkeiten der geometrischen Figuren bekannt geworden, die dann wieder den Zahlen, welche zum Ausdruck dieser Eigenschaften dienen, eine gewisse Bedeutung geben und sie gleichsam an dem geometrischen Wesen theilnehmen liessen.

So wie sich nämlich in den magischen Quadraten die einzelnen Felder ganz verschieden gegen ihre Mitte gruppiren, je nachdem die Quadrate aus gerader oder ungerader Seitenzahl entstanden sind, eben so müssen sich die Zahlen, welche in die Felder eingetragen werden, gleichfalls dieser veränderten Form anpassen; sie erhalten daher durch die geometrische Form erst ihren eigentlichen relativen Werth. Aus den Tetragrammen wird daher z. B. am besten die Bedeutung, Eigenthümlichkeit und Natur der ungeraden, der gerad-geraden und der ungerad-geraden Zahlen erkannt.

Der Durchmesser verhält sich zur Peripherie wie 7 : 22, der Halbmesser theilt die Peripherie in 6 gleiche Theile, und 6 Seiten bilden den Würfel. Wird der Durchmesser eines Kreises gleich 10 gesetzt, so ergibt, wie wir bei *Ibn Esra* gesehen haben, die Zahl des Flächeninhaltes des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes die Zahl der Peripherie.

In den Tetragrammen aus ungerader Wurzel befindet sich in der Mitte Ein Feld, um welches die übrigen in vollkommenster Symmetrie gruppirt sind; dieses Eine Feld, ausgeschieden von den übrigen, macht diese paarig, so dass jedes Feld ein vom Mittelpunkte gleich weit entferntes Gegenfeld besitzt. Dadurch ist nun die Localisation der Zahlen eines magischen Quadrates in die auf solche Art gruppirten Felder so genau bestimmt, dass man nur der geome-

trischen Weisung zu folgen braucht, um die Eintragung der Zahlen mit grösster Sicherheit vollführen zu können.

Die durch die Mittelpunkte aller Felder eines Quadrates mit ungerader Seitenzahl gezogenen Kreise haben uns gezeigt, dass die gleichen Abstände vom Mittelpunkte, wo die Zahlen der gleichen Summen stehen, stets je zwei Halbmesser sind, welche einen Durchmesser bilden. Man braucht daher nur in das Centralfeld die Mittelzahl eines Quadrates einzutragen und es bleiben eben so viele Zahlenpaare von gleicher Summe übrig, als das geometrische Quadrat vom Mittelpunkt gleichweit entfernte Felderpaare besitzt. Hat man nun nach dem algebraischen Gesetze der magischen Kreise die in den concentrischen Halbkreisen gelegenen Endpunkte der Durchmesser mit den ihnen zukommenden Zahlen besetzt, so ist nur die gleiche Summe an jedem diametralen Gegenpunkte zu ergänzen, um die Felder der zweiten Hälfte des magischen Quadrates oder die zweiten Halbkreise mit ihren Zahlen besetzt zu erhalten.

In den Quadraten mit gerader Seitenzahl bilden aber vier Felder in der Mitte den Kern, um welchen die übrigen Felder wohl noch symmetrisch aber nicht mehr so gleichförmig, wie bei den ersteren, situirt sind. Hier müssen nun vier Zahlen aus der Mitte der Zahlenreihe herausgehoben und eingetragen werden, damit die übrigen paarweise in gleiche Entfernung vom Kerne gestellt werden können. Da diese Localisation nach vier Seiten hin geschehen muss, so wird sie nach dem Ausscheiden von vier Zahlen dennoch möglich sein, weil die Anzahl der übrigen Felder eine gerad-gerade bleibt, während durch denselben Vorgang bei den Tetragrammen aus ungerad-geraden Wurzeln die übrig bleibenden Glieder keine gerad-gerade Anzahl ergeben. Deshalb stehen auch in den gerad-geraden Tetragrammen alle Paare von gleicher Summe an den Endpunkten je eines Durchmessers, was in den ungerad-geraden Tetragrammen nicht mehr möglich ist, wo viele Zahlenpaare sich im selben Halbkreise vorfinden. Wir sehen also hier evident die Nothwendigkeit, dass die Localisation der Zahlen sich mit der Seitenzahl des Quadrates ändert, mithin von der Gestalt des Quadrates abhängig ist. Da aber diese, durch die Geometrie bedingte Localisation den Zahlen gewisse Verhältnisse und Relationen aufdrückt, die auf andere Weise kaum erkannt und auf arithmetischem Wege nur durch sehr complicirte Rechnungen ausgemittelt werden können, so wird es klar, dass die Grundprincipien, die in der Geometrie liegen, die Natur der Zahlen bedingen und erklären, dass sie zudem viel ein-

facher sind als jene, welche die Arithmetik liefert, dass also die Geometrie die Basis der Mathematik genannt werden müsse.

Diesen grossen Einfluss der Geometrie auf die Arithmetik erkennen wir auch aus den Längenbestimmungen der Radien, wie wir sie in den magischen Kreisen *(Taf. LIII* und *LIV)* verzeichnet finden. Hier sieht man, dass diese Längenbestimmungen in den ungeraden Tetragrammen die Reihe

$$\sqrt{145},\ \sqrt{148},\ \sqrt{153},\ \sqrt{160},\ \cdots \sqrt{288}$$

ergeben. Die Quadratzahlen dieser Wurzeln steigen nach der natürlichen Ordnung der ungeraden Zahlen auf, und bilden daher eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Differenz 2. — In den Tetragrammen aus gerader Seitenzahl aber ergeben die Längen der Radien die Reihe:

$$\frac{1}{2}\sqrt{626},\ \frac{1}{2}\sqrt{634},\ \frac{1}{2}\sqrt{650},\ \frac{1}{2}\sqrt{674},\ \ldots\ \frac{1}{2}\sqrt{1250}$$

die Quadratzahlen bilden somit hier eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung mit der Differenz 8.

Solche Reihen enthält jeder Streifen eines jeden Tetragrammes. Da aber die Streifen in den Tetragrammen aus ungerader Wurzel von der Mitte nach Aussen nach der natürlichen Zahlenreihe, also nach 1, 2, 3, 4, 5, ... aufsteigen, und da die Wurzelreihen von jeder dieser Grössen ausgehen, so muss es in den Tetragrammen eine ebenso grosse Anzahl solcher in's Unendliche fortlaufenden Wurzelreihen geben, als man sich Zahlen denken kann. — In den Tetragrammen aus ungerad-gerader Zahl wachsen aber die Streifen nach

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \ldots$$

die Wurzelreihen dieser Streifen gehen daher von diesen Grössen aus und sind ebenso unbegränzt wie diese. Da ferner zwischen einem jeden Gliede der natürlichen Zahlenreihe einerseits und zwischen den Gliedern der einzelnen Streifen der aus ungerad-gerader Wurzel entstandenen Tetragramme andererseits eine gewisse, durch das Wesen der Radien bedingte Anzahl von Zwischengliedern liegt, so wird daraus ersichtlich, welch' unendliche Anzahl von Proportionalgrössen dadurch entsteht, die alle dem Wesen und der Natur des Quadrates und des Kreises ihre Entstehung verdanken.

Diese Proportionalen sind unter einander absolut, weil sie abgestufte Bestandtheile jener vollkommensten geometrischen Figuren sind und wegen ihrer gegenseitigen Zerlegbarkeit Abschnitte bilden, die unter einander ebenso vollkommen sind, als ihre beiderseitigen Erzeuger. Hier sehen wir jenen alten Satz, dass das Vollkommene nur Vollkommenes gebiert, in schönster Verkörperung zu Tage treten; aus der Umarmung des Quadrates mit dem Kreise entspriesst eine zahllose Menge von Proportionalgrössen, welche, obwohl arithmetisch irrational, geometrisch so bestimmt sind, dass sie alle nur denkbaren richtigen, d. i. auf dem Wesen der vollkommensten geometrischen Figuren beruhenden symmetrischen Verhältnisse ausdrücken.

Durch jenes geometrische System, wie es *Pag. 147* aus der Zerlegung der einzelnen Linien eines Quadrates in seine eigenthümlichen Abschnitte entsteht, wird ferner ein Maassstab erzeugt, dessen einzelne Theile zwar ungleich sind, der aber in der Proportionalität dieser Theile bei jeder Vergrösserung constant bleibt und daher zu jeder wünschenswerthen Grössenbestimmung verwendbar ist. Man weiss nämlich genau, um welchen Antheil jeder seiner Theile wächst, wenn die Seite des Quadrates um die Einheit zunimmt; ebenso ist es bekannt, dass die Summe jener sieben Grössen, welche die Theile der Körperlänge beziffern, stets um 7 grösser wird, so oft die Seitenzahl um 1 vermehrt wird. Auf solche Weise erhält man eine Reihe von Linien, die sich der natürlichen Zahlenreihe ihrem Werthe nach so sehr nähert, dass sie bei Grössenbestimmungen, die durch Linien ausgedrückt werden sollen, statt der Zahlen gebraucht werden können. Diese Substitution wird aber jeder dadurch zu Stande gebrachten Construction eine Symmetrie und Regelmässigkeit verleihen, wie man sie durch die Zahlenbestimmungen eines Maassstabes, dessen Theile einander gleich sind, gar nicht zu erzielen vermag.

Da nun diese sieben Grössen sich in ihren Verhältnissen bei der Aufsteigung stets gleich bleiben und in der Grösse 7 zusammenfallen, so sehen wir aus der Natur des Quadrates ein Grössensystem hervorgehen, welches wegen seiner Wiederholung von 7 zu 7 den Stellenwerth 7 hat und daher das geometrische Siebener-System genannt werden kann. Die vermittelst dieses Systems aufgestellten Linien haben eine vollständig bestimmte Grösse, während die für sie eingesetzten arithmetischen Werthe fast durchwegs irrationale Grössen ergeben. Wenn man nun überall, wo der Pythagoreische Lehrsatz Anwendung

findet, statt der irrationalen Zahlen diese geometrischen Werthbestimmungen, nämlich die Linien, einsetzt, so werden die Resultate viel genauer sein, als es bei der Berechnung mit Ziffern der Fall wäre; nur muss man bei jeder einzelnen Werthbestimmung zur Construction zurückgreifen und die Resultate durch die Linien, statt durch die Zahlen herstellen. Die Berechnung dieser resultirenden Linien ist aber in jedem Momente leicht und sicher auszuführen, da die absoluten und relativen Grössen dieses Systems genau bekannt sind. Dasselbe wird dort am passendsten anzuwenden sein, wo es sich um Grössenbestimmungen von Linien und Flächen handelt, wie in der Astronomie, Mechanik, Akustik und Optik; besonders wird aber die Architectur und Messkunde daraus einen unbestreitbaren Vortheil ziehen.

Die Localisation der Tetragramm-Zahlen ist ferner nicht blos darnach angethan, um in jedem Streifen dieselbe Summe zu ergeben, ihr mathematischer Werth besteht vielmehr darin, dass die einzelnen Zahlen eines Tetragrammes unter einander eine bestimmte, gesetzliche Relation besitzen. Ist diese Gliederung einmal bekannt und der Werth der Zahlen in den einzelnen Feldern festgestellt, so lassen sich aus den einzelnen Tetragrammen gewisse mathematische Resultate herauslesen, die sonst erst auf dem Wege vielfältiger Berechnungen erlangt werden konnten. So sind z. B. in den Tetragrammen die Wurzel, das Quadrat, der Cubus, die Mittelzahl, die Leitzahl, gewisse Theile des Quadrates und Vielfache der Wurzel, sowie gewisse arithmetische Reihen schon gegeben, also blos herauszulesen. Dasselbe, aber in viel ausgedehnterer Beziehung, findet zwischen jenen Zahlen statt, die in gewissen Feldern der natürlich aufsteigenden Tetragrammen-Reihe eingetragen sind. Hier sieht man schon gelöste mathematische Probleme, z. B. arithmetische und geometrische Reihen zweiter und dritter Ordnung eingetragen, ohne sie erst berechnen zu müssen.

Diese mathematischen Relationen der Zahlen gewisser Felder werden aber in's Unendliche vermehrt, wenn man mit den Tetragrammen alle nach den angegebenen Methoden möglichen Modificationen vornimmt. Hier kann man nun behaupten, dass es gar kein rationales Verhältniss zweier oder mehrerer Zahlen gibt, welches nicht auf diesem Wege der Localisation, der Abwägung und Bestimmung der Zahlen hergestellt werden könnte, wenn man nur jene Tetragramme kennt und aufstellt, welche die gewünschten Grössenverhältnisse in sich enthalten. Um zu dieser Kenntniss zu gelangen, wird eine eingehende Analyse aller

Formen der Tetragramme nöthig sein; diese Analyse wird aber durch die in den algebraischen Tafeln enthaltenen Formelketten, welche das Wesen und die Construction aller Tetragramme aufschliessen, mit aller Sicherheit zu Stande gebracht werden können, wobei es sich dann nur um die Erweiterung und Vervielfältigung der Tetragramme über die Wurzel 26 hinaus und ihrer hier blos angedeuteten Modificationen handeln wird.

Diese urälteste Rechnungsmethode wird daher, statt ein blosses Hilfsmittel zur Berechnung gewisser Aufgaben zu sein, die vollständige Lösung derselben bringen, sie wird mit Recht die Mathematik der gelösten und vollbrachten Probleme genannt werden können. Die Tetragramme werden zur praktischen Berechnung ebenso zu verwerthen sein, wie man die Tafeln der Zinsenberechnung zur Eruirung aller einschlägigen Fälle benützt. Um nur ein Beispiel anzuführen, wird es für alle Zukunft überflüssig sein, gewisse Potenzen und Wurzeln, sowie deren Reihen durch Rechnung zu suchen, wenn nach *Taf. I, II, XLIII, XLIV, XLV* gleiche Tetragramme aus den Potenz-Reihen der Zahlen 2, 5, 7, 9, 11, 13, ... aufgestellt werden. Will man nun aus irgend einer wahren Potenz eine beliebige ziehbare Wurzel bestimmen, so hat man sie nur jenem Felde zu entnehmen, in welchem sie enthalten ist; denn da die Exponenten magisch geordnet sind, so werden dadurch alle ihre Verhältnisse und Relationen klar ersichtlich.

Das wichtigste Resultat dieses urältesten Systemes für die Mathematik besteht endlich in jenen Formeln, welche auf den Tafeln *XLVII, XLVIII, L* verzeichnet, den Schlüssel zu dem Wesen und der Construction aller Tetragramme ergeben. Indem nämlich die eine Tafel die Zahlen aller ungeraden Quadrate, die zweite die Zahlen aller gerad-geraden Quadrate und die dritte die Zahlen aller ungerad-geraden Quadrate bestimmt und angibt, sind für alle Zahlen die allgemeinen Werthbestimmungen gegeben, welche das Verhältniss bezeichnen, in welchem eine Zahl zu dem Quadrate steht, dessen aliquoter Theil sie ist. Man erhält auf diese Weise allgemeine Ausdrücke für die Werthe, welche eine und dieselbe Zahl in allen Quadraten besitzt.

So wird der Ausdruck

$$\frac{w^n - (w-1)w}{2} - \left(\frac{w-2}{2}\right)$$

in allen Quadraten aus gerader Wurzel die Einheit, der Ausdruck

$$\frac{w^2 - (w-1)\,w}{2} - \left(\frac{w-4}{2}\right)$$

in jedem geraden Quadrate die Zahl 2 ergeben u. s. w. Wenn nun die auf solche Weise gegebenen allgemeinen Werthbestimmungen in Reihen geordnet werden, so resultiren daraus alle Verhältnisse, in welchen die einzelnen Zahlen der unendlichen natürlichen Zahlenreihe zu einander stehen.

Das so entstandene neue Zahlensystem hat also, von Quadrat zu Quadrat derselben Gruppe aufsteigend die einzelnen Quadratzahlen zum Bestimmungswerthe. Die allgemeine Werthbestimmung, die jede Formel angibt, wird sich aber natürlicher Weise ändern müssen, sobald man in der aufsteigenden Zahlenreihe das Gebiet des nächst höheren Quadrates derselben Gruppe betritt. Der in dieser Richtung vorzunehmenden Analyse wird daher die Aufgabe zugewiesen sein, das Gesetz aufzufinden, nach welchem im besagten Falle sich die Form und Gliederung des algebraischen Ausdruckes ändert. Ist dieses Gesetz einmal aufgestellt, so wird man es immer nur mit den allgemeinsten Werthbestimmungen der Zahlen und ihren gegenseitigen Relationen zu thun haben, aus denen man dann die ziffermässigen Grössenverhältnisse in den betreffenden Tetragrammen mit Leichtigkeit wird auffinden können.

Diese Aufgabe muss ich aber der mathematischen Forschung Anderer überlassen, da der rein mathematische Theil nicht den Hauptzweck gegenwärtiger Arbeit bildet. Meine Aufgabe soll vielmehr künftig sein, die durch die Ziffer festgestellten objectiven Thatsachen so zu untersuchen und zu prüfen, dass ihr Zusammenhang mit diesen mathematischen Functionen erwiesen werde; es soll meine Aufgabe sein festzustellen, ob die in den Zweigen der Naturwissenschaft eruirten Zahlen mit jenen Grössenbestimmungen harmoniren, welche wir in diesem neuen Zahlen- und Grössensysteme als besondere Functionen kennen gelernt haben.

Die Bedeutung der magischen Quadrate und Kreise

für die

Naturwissenschaft.

In den ältesten heiligen Schriften der Indier, in den *Vedás* findet man die ersten Spuren der Lehre vom Mikrokosmos und Makrokosmos.

Der Mensch, das Abbild des Weltalls und seines Schöpfers.

Die Vedás sagen: „Das Eine höchste Wesen heisst *Parabrahma* d. i. Selbstständigkeit, und hat an sich als unentäussertes Urwesen keine Tempel und keine Abbildungen. Dies ist also *Brehm*, der ewig Eine, welcher Eins ist mit dem All, der äusserlich betrachtet, unendliche Gestalten haben würde, dessen Selbst aber keine Gestalt hat, sondern das Schauen ist, das Organ und das Object des Schauens zugleich, welcher kleiner ist als ein Atom (das unendlich Kleine) und grösser als die Welt (das unendlich Grosse), seinem Wesen nach unaussprechlich, undarstellbar.

Dieses Urwesen brachte aus sich selbst durch Beschauen seiner selbst die Welt hervor, die sich zuerst durch die Trias: *Brahma*, die Erde, *Schiwa*, das Feuer, und *Wischnu*, das Wasser, offenbarte. Hierin besteht die indische Dreieinigkeit, die *Trimurti*.

Diese weltenbauende Potenz, *Parabrahma*, war durch hundert Götterjahre in Selbstanschauung oder Meditation versunken, ehe sie daran ging, die Ideen der Weltordnung zu fassen.

Nachdem diese Ideen gefasst waren, ging aus *Parabrahma* zuerst *Brahma*, die Schöpferkraft, *Schiwa*, die zerstörende Kraft und *Wischnu*, die wiedererzeugende oder erhaltende Kraft, hervor.

Die schöpferische oder weltenbildende Kraft wird nun unter der menschlichen Gestalt dargestellt; denn es heisst weiter: Aus dem Kopfe *Brahma's*, aus seinem Munde erschuf er einen Sohn *Brehman* (Priester), welchem er die vier *Vedas* gab.

Die vier Worte (Bücher) seiner vier Munde.

Dann schuf er aus seinem rechten Arme den *Kaettris* (Krieger) und aus seinem linken Arme dessen Weib *Schaterany*.

Aus seinem rechten Schenkel schuf er den dritten Sohn *Bais*, (den Ackerbauer, Handwerker und Kaufmann) und aus dem linken Schenkel dessen Weib *Basany*. Aus seinem rechten Fusse schuf er den vierten Sohn *Suder* (den Knecht) und aus dem linken Fusse dessen Weib *Suderany*.

Bei dem Bilde *Brahma's* wurde die Menschengestalt als das Wesentliche behandelt. Das Bild dieses Weltschöpfers war als Hermaphrodit vorgestellt.

Bei den Aegyptern, welche der atomistischen Weltanschauung huldigten, bestand alles Erschaffene aus einer Gesellschaft selbstständiger, lebender Individuen. Diese Individuen gruppirten sich in mannigfacher Verbindung und bildeten Leiber von verschiedener Grösse und Form. So bildete der Sternenhimmel den vollkommensten und grössten Leib, ihm ähnlich war der Leib der Erde und endlich diesen beiden gleich der Leib des Menschen.

Diese drei Leiber waren ihrem Wesen, ihrer Structur und ihren Eigenschaften nach einander gleich gebildet, so dass man durch eine genaue Kenntniss des einen Leibes zur Erkenntniss des anderen gelangen könne.

Die Seele des Menschen konnte sich daher den einen Leib verlassend und in einen der beiden anderen übergehend leicht zurecht finden, da sie überall eine ganz gleich eingerichtete Wohnung fand.

Alle Naturerscheinungen waren daher eben so viele Pforten, durch welche sie in die drei verschiedenen Leiber eindringend, zur Kenntniss ihres Wesens und ihrer Eigenschaften gelangen konnte. Die Aegypter behaupteten daher, dass alle Weisheit des Menschen aus einer richtigen und tiefen Naturanschauung hervorgehe, und hatten diese Ansicht in dem Mysterium der Hermessäule niedergelegt. Diese Hermessäule war aber nichts Anderes, als die Verkörperung jener prototypen Dimensionen des menschlichen Körpers, wie sie dem Gesetze seines Baues zu Grunde liegen. Da sie aber bemerkten, dass diese Grössenverhältnisse

zugleich dem Baue des Sternenhimmels vorstehen, so mussten sie die gleiche Construction und Beschaffenheit beider anerkennen. Auch bei den Persern finden wir die Lehre des Mikrokosmos und Makrokosmos in Ormuzd, in Kajomortes und in Meschia und Meschiana angedeutet.

Noch deutlicher und bestimmter sehen wir aber die Lehre vom Makrokosmos und Mikrokosmos ausgesprochen, wenn wir die älteste Kosmogonie der Hebräer, wie sie sich durch Tradition fortgepflanzt hat, näher betrachten. Hier werden der Gottheit geradezu die verschiedenen Glieder des menschlichen Körpers beigelegt, ja ihre ungeheueren Grössen angegeben. Die Höhe ihres Leibes, die Entfernung des rechten Armes von dem linken, die Entfernung beider Augäpfel und der Umfang des Kopfes, die Höhe von der Sohle zur Hüfte oder Schoossfuge, von der Hüfte zum Halse, die Länge des Halses und Bartes, der Hand und der Schulterbreite, die Entfernung beider Köpfe der Oberarmbeine von einander und die Länge der Finger werden durch eine ungeheuere Meilenanzahl bezeichnet.

So sagt *Is. 62. 1.* „Der Himmel ist mein Thron und die Erde mein Fussschemel."

„Diese unermessliche menschliche Gestalt, welche nach Aegyptischer Anschauungsweise die Formation und Grösse des Sternenhimmels bedeutet, sei nun im *Adam Kadmon*, dem Ur- oder Prototyp-Menschen, im Kleinen dargestellt."

„Der Mensch als Mikrokosmos oder die Welt im Kleinen mit allen seinen festen und flüssigen Theilen nebst seiner Athmosphäre, wie auch alle in ihm vorgehenden physicalischen Processe sind das Prototyp der oberen Welten. Daher sagt auch Hiob *(19. 26.)*: Aus meinem Leibe ersehe ich die Gottheit d. h.: Alle physischen und moralischen Handlungen des Menschen in der unteren Welt stehen im Verhältnisse mit den bis an die Gottheit reichenden und zu ihr in einer gewissen Subordination sich befindenden oberen Welten."

„Die ganze Schöpfung ist da, um einen lebendigen Abdruck der Gottheit und sinnliche Beispiele von seiner erhabenen Weisheit anschaulich darzustellen."

„Der Mensch als Mikrokosmos ist der Inbegriff aller übrigen Welten und die Geheimnisse derselben alle finden sich gleichsam in Miniatur in ihm, so wie in Gott alle Welten im Grossen sich vereinen."

„Alles Geistige können wir nur durch die Betrachtungen des menschlichen Körpers und seiner Seele in ihrem Zusammenhange und ihren wechsel-

seitigen Einwirkungen auf einander begreifen. Will man aber das Geistige ohne Bezug auf das Körperliche, also rein geistig erfassen, d. h. ohne sich solches gleichsam zu verkörpern, so kann dieses eben so wenig geschehen, als man von der Seele in ihrer Abstraction von dem Körper sich eine Vorstellung zu machen im Stande ist. Was daher der Mensch nicht aus sich selbst, aus seinem eigenen Wesen zu erkennen vermag, wozu er in sich selbst kein Beispiel auffinden kann, nicht von sich analog zu schliessen im Stande ist, das kann er auch auf keine andere Art erkennen.

„Der Schöpfer machte Alles so, und bildete den Menschen auf eine solche Art, dass er für Alles Kräfte, für Alles Beispiele in sich selbst finden kann.“

„Daraus, dass der weise Baumeister in dem Baue des menschlichen Körpers alles zu seiner Erhaltung, zu seinem mannigfaltigen Gebrauche und zu seiner Fürsorge Nöthige viel besser eingerichtet hat, als es der weiseste menschliche Künstler eingerichtet haben würde, kann man von dieser Einrichtung des menschlichen Körpers auf die Erhabenheit der göttlichen Kunst schliessen. Dadurch wird dem Menschen die Gottheit durch die Betrachtung und Erkenntniss seines eigenen Ich's begreiflich gemacht, und er wird durch diese Vergleichung auf die Wahrnehmung der wunderbaren Gotteskunst hingeleitet; er wird aus dem Abbilde einige Züge des Vorbildes erkennen lernen.“

„Gott ist der Schöpfer und zugleich der Zweck der Welt; er schuf die Welt nach seinem Ebenbilde, damit seine Grösse und Weisheit, welche in unzähligen und wunderbaren Thaten liegt und dadurch sich zeigt, erkannt werde.

Damit nun dieser Zweck erreicht würde und der Mensch Gott zu erkennen vermöchte, legte Gott sein Bild in den Menschen selbst. So wie der Mensch Raum und Zeit in seinem Verstande zusammenfasst und misst, unzählige Gegenstände in seinem Gehirne concentrirt, die mannigfaltigsten und verschiedenartigsten Gedanken und Ideen in sich vereiniget und dadurch auf alles Irdische einwirkt, über alles Irdische herrscht; so ist er der Abdruck der Gottheit hienieden, das Ebenbild dessen auf Erden, der alle Räume und Zeiten umfasst, in alle Welten wirkt und über das *All* herrscht.“

„Der Mensch verbindet in sich das Geistige mit dem Körperlichen, lässt beides wechselseitig auf einander wirken, construirt durch Vergleichung aus einzelnen Merkmalen allgemeine Begriffe und macht durch die abstractesten Begriffe das Geist'ge durch das Körperliche begreiflich und anwendbar. Ebenso ver-

bindet Gott alle Welten mit und unter einander, verfeinert das Körperliche durch das Geistige und versinnlichet das Geistige durch das Körperliche, um es dem Menschen anschaulich und begreiflich zu machen. So wie der Mensch, der aus theilbaren, auf das verschiedenartigste gestalteten Gliedern besteht, die mit einander verbunden sind und wechselseitig zum Lebenszwecke auf einander wirken, mittelst der einzigen und untheilbaren Seele zusammengehalten und durch sie regiert wird; so werden die verschiedenartigen Welten, die ebenfalls wechselseitig auf einander wirken, sich einander mittheilen und unterstützen, durch Gott zusammengehalten und regiert."

„Betrachtet der Mensch sich selbst, so wird er sehen, dass der Schöpfer bei ihm, diesem seinen Meisterwerke, alle jene Kunstgriffe, ja mathematischen Behelfe angewendet hat, welche jeder Künstler und Mechaniker, der die Natur studirt, bei der Verfertigung eines Kunstwerkes und Mechanismus anzuwenden pflegt. Die Stimme des Menschen z. B. wird nach denselben Gesetzen hervorgebracht, wie die Töne der Orgel oder eines musikalischen Tasteninstrumentes. Die Circulation des Blutes wird durch das Ein- und Ausathmen der Luft, durch Ausdehnung und Zusammenziehung der Herzwandungen wie durch eine Spritze und ein Schöpfwerk verursacht."

„In dem Menschen liegt eine doppelte schöpferische Kraft, sowohl zur Hervorbringung seines geistigen Wesens, d. h.: das Vermögen, seine innersten Gedanken und Gefühle durch Geberden, Worte und Thaten Anderen begreifbar zu machen, als auch zur Hervorbringung seines körperlichen Wesens, nämlich sich durch Fortpflanzung seines Geschlechtes gleichsam zu verewigen.

Durch die Kraft der Sprache fördert der Mensch seine Gedanken und Seelengefühle zu Tage. Darum heisst auch die göttliche Schöpfung eine Rede *Memra* (Λόγος das Wort). Will der Mensch das begreiflich machen, was in seiner vielumfassenden Seele vorgeht, so muss das Geistige seiner Seele sich in einen Hauch (πνεύμα) verkörpern und in ein Wort concentriren."

„Gott will von dem Menschen begriffen werden. Da aber der Mensch als ein endliches Wesen das Unendliche der Gottheit in ihrer reinsten und vollkommensten Wesenheit zu erfassen nicht vermag, so liess Gottes Güte sich herab, im Lichte, in mannigfachen Bekleidungen und in den *Sephiroth* (Zahlen) sich anthropopathisch zu beschränken und dergestalt gleichsam verkörpert und sinnlich wahrnehmbar sich ihm darzustellen."

„Das Grundwesen der Gottheit, *Ensoph*, bestand aus der Trias: der Krone (Macht), der Weisheit und dem Verstande; ferner wurden dem unendlichen Urwesen weitere Prädikamente beigelegt: Die Gnade, die Stärke, die Zierde, (Ruhm oder Schönheit) der Sieg oder die Ewigkeit, die Majestät oder Ehre, der Urgrund und die Regierung oder das Reich. Diese sieben unteren mit den drei oberen Intelligenzen und Prädikamenten summirt, machen den Inbegriff des Wesens der Gottheit aus.

Nach diesem erhabenen Vorbilde war nun der Urmensch *Adam Kadmon, Adam Harischon, protoplastes in specie hominum* gebildet. Sein Körper bestand ebenfalls aus zehn Haupttheilen, aus drei edlen, dem Kopfe und den beiden Armen, und aus den sieben untergeordneten.

Ausser diesen zehn Fundamentaltheilen wurden an ihm noch viele andere Theile als wichtig bezeichnet, nämlich:

1. Der Schädel vom Scheitel bis zum Gehörgange.
2. Das rechte Ohr.
3. Das linke Ohr.
4. Das rechte Auge.
5. Das linke Auge.
6. Die Nase.
7. Der Mund.
8. Die Stirne.
9. Die Spitze des Bartes.
10. Die drei Articulationen des rechten Armes.
11. Die drei Glieder des linken Armes.
12. Die Brust.
13. Der Bauch.
14. Das Zwerchfell.
15. Das Gehirn.
16. Der Zwischenraum zwischen den Meningen.
17. Der rechte Schenkel.
18. Der linke Schenkel.
19. Die Organe der Mundhöhle.
20. Die Organe der Nasenhöhle."

So waren auch die übrigen Organe des Gehirnes, die Haare, die Eingeweide der Brust- und Bauchhöhle, die Geschlechtswerkzeuge, die verschiedenen

Barthaare, die Schultern, die Brüste, die Magengrube, die rechte und linke Körperhälfte, die Mittellinie des Körpers bedeutsam und wurden einzeln für sich betrachtet.

Der Körper dieses Urmenschen bestand nun seinem Knochengerüste nach aus 248 Theilen, die Zahl seiner Blutgefässe sollte 365 betragen, daher waren in ihm 613 Fundamentalbestandtheile, welche aber in eine viel grössere Anzahl von Einzeltheilen zerfielen.

Das Gehirn theilte sich in drei Theile und den Kopfhaaren wurde eine besondere Wichtigkeit beigelegt; denn man sagte von ihnen, dass sie, weil sie in dem wichtigsten Organe, dem Kopfe, wurzeln und nach aufwärts streben, jene Kanäle sind, durch welche die Sinnenwelt mit der Gottheit communicire.

Das Gehirn hatte nach seinen drei Haupttheilen drei verschiedene Naturen, welche man Weisheit, Vernunft und Verstand nannte.

Von dem Gehirne hängen die Sinne ab: das Gesicht, das Gehör, der Geruch und die Sprache.

Ferner stammen aus ihm 32 Leitungsfäden, die man 32 Wege der Weisheit nannte und die mit den 32 Nervenfäden, welche aus dem Gehirne zu den 32 Zähnen laufen, in Verbindung gebracht wurden.

Die Zähne zerfielen in 4 obere und 4 untere Schneidezähne, 2 obere und 2 untere Hundszähne, welche zusammen 12 ausmachen, und 5 Mahlzähne befinden sich zu beiden Seiten in der unteren und oberen Kinnlade so, dass $5 + 5$ und abermals $5 + 5$ zusammen $10 + 10 = 20$ also mit den ersten 12 die Zahl 32 erfüllen.

Die 6 Ringe der Luftröhre, welche in der Mittellinie des Körpers liegen, bezeichneten zugleich die 6 Haupttheile der ganzen Körperlänge.

Den Häuten des Auges stand die Zahl 7 vor und das ins Auge tretende Licht stellte die oberste Trias dar, welche mit dieser 7 die vollständige 10 ausmachte. Die Entfernung von der Nasenwurzel zum Kinn war mit der mystischen Zahl 13 beziffert.

Der Kopf war in 7 Theile getheilt: Der Scheitel, die Gehirnfeuchtigkeit, die Gehirnhäute, die Stirn, die Gesichtslänge von der Nasenwurzel zum Kinn, die Augen, die Nase.

Die ganze Gestalt des Urmenschen befand sich innerhalb zehn concentrischer Kreise, deren Durchmesser die Mittellinie seines Körpers bildete. Diese

Mittellinie oder seine Körperlänge war in 6 Theile getheilt, welche die Längen der durch sie bestimmten 6 Körperabschnitte bezeichneten. Jeder dieser Theile hatte einen Eigennamen und durch diesen eine Zahlenbedeutung, welche den späteren Auseinandersetzungen und Erklärungen zu Grunde gelegt wurde.

Die Längenachse seines Körpers hiess *Attik Jomin seu Antiqui dierum* und war von einer wagrechten Linie durchschnitten, so dass dadurch drei gerade Linien oder ein Kreuz gebildet wurden.

Das ganze System von geraden und von Kreislinien wurde *Mundus Punctatorum* genannt.

Die Kreislinien heissen *Nekuddim* und in ihren Sphären stehen alle geradlinigen Bestimmungen.

Im innersten Kreise war der Raum für alle künftigen Schöpfungen und Welten, diese alle sind daher im *Adam Kadmon* enthalten oder präformirt und gehen aus ihm hervor.

Deshalb war *Adam Kadmon* das Ur- oder Vorbild des Weltalls.

Da er aber von Andern blos für das Vorbild der Menschengestalt gehalten wurde, so entstand später der Streit, ob er bereits vor der gesammten Schöpfung bestanden habe, oder ob er nach der Erschaffung unserer Erde als das Urbild des ersten Menschen *Adam* gebildet worden war. Diejenigen, welche unter *Adam Kadmon* den Urgrund oder das Urbild des Weltalls verstanden, mussten ihn vor die Schöpfung als die Uridee derselben setzen, während diejenigen, welche sich ihn als Uridee des Menschen dachten, letzterer Ansicht huldigten.

Doch auch die letzteren sahen in ihrem *Adam Kadmon* das Grundprincip des sichtbaren Sternenhimmels und leiteten aus den Fundamentalgrössen der menschlichen Grössenbestimmungen und ihren gegenseitigen Verhältnissen die Fundamentalzahlen des ganzen Sonnensystemes ab.

Man findet nämlich in diesen ältesten Traditionen die Behauptung aufgestellt, *Adam Kadmon* sei mit seinen prototypen Grössenverhältnissen aus dem Wesen und der Construction des Tetragrammes der Zahl 7 hervorgegangen, und dieses Tetragramm sei dasjenige, welches die Grundbestimmungen aller nur denkbaren symmetrischen, harmonischen und allein richtigen Grössenverhältnisse der Natur in sich verborgen enthalte, dass in ihm das Geheimniss der absoluten Vollendung des Weltenbaues enthalten sei.“

Doch alle diese Andeutungen waren nur symbolischer Natur und dienten daher zum verlockenden Spielballe jener Mystik und Magie, die von den Indiern, Persern, Aegyptern, Arabern, Hebräern und Pythagoräern mit besonderer Vorliebe betrieben wurden.

Die äusserst spärlichen Ueberreste, welche daraus der Arithmetik und Geometrie erhalten wurden, waren aber so anziehend und zum tieferen Denken so anregend, dass nicht allein die ältesten Philosophen sich einer phantasiereichen Speculation über dieselben hingaben, sondern dass auch die ernstesten Mathematiker aller verflossenen Jahrhunderte ihre grösste Aufmerksamkeit der Lösung dieses merkwürdigen Räthsels zuwendeten. Doch diese Lösung musste so lange ein unerfüllter Wunsch bleiben, als man den Sinn gewisser Sätze, welche geeignet sind, ein erhellendes Streiflicht in dieses Dunkel zu werfen, nicht deuten konnte, da die Bedeutung der Zahlen, welche sie enthalten, bis jetzt nicht aufgedeckt worden war.

Ein solcher Fundamentalsatz der Mystik der Hebräer lautet: „Der Allerhöchste *Adonai* hat durch den Herrn *Jedud* (Fundamentum) das Weltall geschaffen. Dieser Satz wurde dadurch etwas näher erklärt, dass folgende Sätze angeschlossen erscheinen:

אדני $= 65$, *Dominus*, der Herr, ist der erste und allem Erschaffenen vorstehende Name, durch welchen der Zutritt zum Urgrunde der Tetragramme offen steht. Um seinen Sinn zu verstehen, bemerke: Der eigenthümliche Name des Höchsten ידוד $= 24$ bezeichnet das Dasein des höchsten Baumeisters, von welchem Alles, was das Universum enthält, abhängt. Aber die erste Pforte und der erste Schlüssel, durch welche wir zum Tetragramme herankommen, ist der Name *Adonai*."

Die hebräischen Buchstaben sind gleich den griechischen Zahlenzeichen und man kann daher ein jedes Wort nach dem Werthe seiner einzelnen Buchstaben als eine Zahl aussprechen.

Das Wort *Adonai* bedeutet dem Werthe seiner einzelnen Buchstaben nach die Zahl 65 und das Wort *Jedud* die Zahl 24. Der obige Satz in Zahlen ausgedrückt heisst daher: „Die Zahl 65 hat mit der Zahl 24 die mathematische Grundlage der ganzen Schöpfung gebildet." Nun ist aber, wie wir in der Abhandlung der Tetragramme gesehen haben, das innerste Wesen oder die mathematische Grundlage dieses wunderbaren Zahlensystemes auf jene mathema-

tische Gliederung gebaut, welche wir die arithmetische Reihe dritter Ordnung nennen. Alle Tetragramme sind ihrer Grundbeschaffenheit nach so geordnet, dass eine jede horizontale, verticale und eine jede der beiden Haupt-Diagonalreihen dieselbe Summe ergeben. Diese Summe ist daher die erste Grundbedingung ihres Wesens und ihrer gesammten Construction, da ein jedes Tetragramm, soll dasselbe wahr sein, vor Allem dieser Bedingung entsprechen muss.

Zur Herstellung und genauen Bestimmung einer arithmetischen Reihe dritter Ordnung müssen aber, wie bekannt, ihre ersten drei Glieder und ihre stetige Differenz bekannt sein.

Diese drei ersten Glieder der Kette, welche das merkwürdige Zahlengebäude beherrscht, sind nach dem arithmetischen Schlüssel auf *Taf. XLVI, Nro. 68* und *69* die Zahlen 15, 34 und 65, und 24 ist die stetige dritte Differenz, welche alle Glieder verbindet. Das wichtigste Bestimmungsglied ist das dritte, hier die Zahl 65, und die constante Differenz die Zahl 24. Man kann daher das Wesen dieser Reihe mathematisch nicht besser ausdrücken, als indem man ihr drittes Glied und ihre constante Differenz ausspricht, welches im obigen Satze geschehen ist.

Dieses Räthsel konnte aber um so schwerer gelöst werden, als dieses mathematische Princip der Tetragramme bis jetzt nicht bekannt war und die Zahlen 15 und 34, welche zwar ebenfalls als wichtige Fundamentalzahlen galten, mit diesem Satze in keinen Zusammenhang gebracht wurden und von ihm getrennt in anderen mystischen Sätzen vorkamen.

Obschon nun diese wahre Bedeutung der Zahlen 65 und 24 verloren gegangen war, da wir keine richtige Auslegung derselben in der ganzen geschichtlichen Zeit antreffen, so sehen wir dieselben doch bis in die mythische Periode hinein die wichtigste Rolle spielen; sie wurden stets für die heiligsten Zahlen gehalten, wie es die beiden Begriffe, welche sie als Worte ausdrücken, bestättigen.

Aus diesen ältesten hebräischen Urkunden geht ferner zweifellos hervor, dass das Wesen und die wahre mathematische Gliederung der Tetragramme für den Bestimmungsgrund aller Zahlenverhältnisse, welche in den verschiedenen Naturerscheinungen zum realen Ausdrucke gelangen, gehalten wurden.

Das Weltall entstand ja nach dieser urältesten Anschauungsweise nach Maass, Zahl und Gewicht, *mensura, numero, pondere omnia creata sunt*, es war daher von einem höchst weisen Baumeister ganz nach mathematischen

Grundsätzen entworfen und ausgeführt, und das mathematische Princip zu diesem wundervollen Baue lag im Wesen und in der Gliederung des Tetragrammes oder magischen Quadrates.

Diese Ansicht sehen wir klar ausgesprochen in der Behauptung, dass die Grundprincipien und Grundverhältnisse dieses mystischen *Adam Kadmon*, des Ur- oder Prototyp-Menschen, dem magischen Quadrate der Zahl Sieben entnommen seien, und dass nach denselben Zahlenverhältnissen der Sternenhimmel und insbesondere unser Sonnensystem gebaut sei.

Die Grössenverhältnisse aus der Stirnhöhe, Kopflänge, Bartlänge, der Entfernung des Scheitels vom Schwertknorpel u. s. w. sollten die Verhältnisse bezeichnen, in welchen die Abstände der Planeten von der Sonne stehen.

Ausser diesen wenigen und unbestimmten Angaben über die Verwerthung des Quadrates der Zahl Sieben bei der Construction der prototypen Menschengestalt und in der Astronomie findet man noch einige andere Andeutungen, wie sich das Alterthum die Bedeutung dachte, welche die Tetragramme für andere Wissenschaften z. B. für die Chemie haben sollte. Es war nämlich die Meinung ausgesprochen, dass gewisse Tetragramme ihrem mathematischen Wesen nach d. h. durch die in ihnen enthaltenen eigenthümlichen Zahlenverhältnisse genau jene Zahlenverhältnisse ausdrücken, welche den verschiedenen Verbindungen gewisser Metalle zu Grunde liegen.

So sollte das Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl 3 den mannigfachen Verbindungen des Bleies, das der Zahl 4 denen des Zinnes, das der Zahl 5 denen des Eisens, das der Zahl 6 denen des Goldes, das der Zahl 8 denen des Quecksilbers und das der Zahl 9 denen des Silbers vorstehen.

Doch alle diese spärlichen Andeutungen waren so unbestimmt, dass man weder ihren eigentlichen Sinn, noch die Art und Weise ihrer Verwerthung für eine wahre wissenschaftliche Forschung auch nur ahnen konnte.

Aus allen diesen mystischen Sätzen ging nur so viel deutlich hervor, dass das Alterthum auf das Wesen und die eigentliche wahre Construction der Tetragramme einen ungeheueren Werth legte, indem es dieselben für den Urgrund, für das Vorbild oder Symbol aller geschaffenen Dinge und für die Erkenntnissquelle aller Sinneswahrnehmungen und Vernunftwahrheiten hielt; ja das Tetragramm hatte eine so hohe Bedeutung, dass es sogar für das Symbol jenes

Wesens galt, durch welches Alles erschaffen worden ist, von dem Alles erhalten wird, und dem Alles sein Leben und Wirken verdankt.

Die älteste hebräische Religion unterschied sich daher ihrem innersten Wesen nach dadurch von den übrigen Religionen des Orientes, dass sie die Naturerscheinungen auf einem mathematischen Urgrunde fussend erkannte und die letzte Idee alles Entstehens und Bestehens einer abstracten mathematischen Function zuwies. Diese mathematische Function setzte nun nothwendig einen weisesten Architekten und Baumeister *(Archetypa)* voraus, der dann der Schöpfer des Weltalls sein und sich von dem Geschaffenen, *toto coelo*, unterscheiden musste, während die übrigen Religionen nichts anderes waren, als eine mehr oder weniger rohe Vergötterung der Naturerscheinungen selbst.

Während sich daher nach der religiösen Anschauung der Einen die Forschung auf dem Gebiete der Natur den Naturerscheinungen als solchen allein zuwendete, suchten die Anderen überall nicht bloss die Form, die gegenseitigen Bedingungen und Beziehungen der verschiedenen Erscheinungen und Processe zu ergründen, sondern sie trachteten zu einer Ahnung jener Principien und Ideen zu gelangen, welche der veränderlichen und wechselnden Form der Erscheinung als unwandelbarer Urgrund vorstehen, sie strebten nach der Erkenntniss der Gesetze der Natur und glaubten durch diese Erkenntniss einen Theil des Wesens der Gottheit erkannt zu haben.

Diese zwei Richtungen der Naturforschung bestehen auch jetzt noch in ungeschwächtem Maasse fort, und sie werden eine jede ebenso abgesondert für sich verfolgt, wie dieses früher durch eine wesentlich verschiedene religiöse Anschauung bedingt war.

Diejenigen, welche mit der Bestimmung und Ergründung der durch die Sinne wahrnehmbaren Erscheinung zufrieden sind und nicht glauben, dass es je möglich sein werde zu jener höheren Erkenntniss zu gelangen, sehen spottend auf jene hin, welche sich mit der Sinneswahrnehmung, die nach ihrer Ansicht grossen Täuschungen unterliegt, nicht begnügen, sondern nach einem Anhaltspuncte streben, der statt des Unbestimmten das Bestimmte, statt des scheinbar Zufälligen das Gesetzliche, statt des Vergänglichen das Unvergängliche, statt des Sinnlosen das Vernünftige festzustellen im Stande wäre. Beide unterscheiden sich daher von einander nur dadurch, dass die Einen sich mit einer geringeren Erkenntniss begnügen, weil sie glauben, dass eine weitere und höhere nicht möglich ist,

während die Anderen, von einer materiellen Weltanschauung nicht befriediget, eine den physikalischen Eigenschaften der Materie zu Grunde liegende schöpferische Kraft und Anordnung aufzufinden und zu erkennen sich bemühen.

Dass beide dieselben Wege wandeln können, so lange es sich darum handelt, die einzelnen Naturerscheinungen nach den sie hervorbringenden physikalischen Eigenschaften der Materie, nach den dabei thätigen Kräften und nach den dabei vorkommenden Raum- und Zeitbestimmungen zu beobachten, zu zergliedern und festzustellen, ist ebenso begreiflich, als es erklärlich ist, warum die Einen ihren Weg noch weiter fortsetzen, während die Anderen mit den erlangten Resultaten zufrieden einen Weg nicht verfolgen wollen welcher sich ihnen in eine nebelhafte Ferne zu verlieren scheint.

Von dieser kleinen Abschweifung zum eigentlichen Gegenstande zurückkehrend will ich, um den jetzt aufgefundenen Zusammenhang des magischen Siebener-Quadrates mit dem Bauplane der menschlichen Körpergestalt nachzuweisen und zu erklären, eine nochmalige kurze Zergliederung und Vergleichung beider vornehmen und zuletzt die Andeutung geben, wie die künftige Forschung beschaffen sein müsse, damit ein Zusammenhang der verschiedenen Naturerscheinungen mit den übrigen Tetragrammen ergründet und festgestellt werden könnte.

Betrachtet man *(Taf. IV, Nro. 21)* das Tetragramm und die Kreis-Construction aus dem Quadrate der Zahl 7, so sieht man, dass dem Siebener-Quadrate zehn concentrische Kreise zukommen, welche die verschiedenen Radien und die Localisation der dem Tetragramme eingeschriebenen Zahlen bestimmen.

Der längste Durchmesser, welcher den Mittelpunkt des linken oberen Eckfeldes mit dem Mittelpunkte des rechten unteren Eckfeldes verbindet, zeigt an seinen beiden Endpunkten die Zahlen 22 und 28, während in seiner Mitte im Mittelpunkte der concentrischen Kreise die Mittelzahl des Tetragrammes 25 steht. Die Länge dieses Durchmessers beträgt 60, daher der Halbmesser 30. Der zweite Halbmesser dieser Diagonale beträgt 20, der dritte 10.

Die Grundzahlen des magischen Siebener-Quadrates sind 1, die Wurzel 7, die Mittelzahl 25, $1 + 49 = 50$ die Summe der gleichen Paare, die Leitzahl 21, 175 die Summe einer Reihe, 1, 6, 7, 8 die Differenzen der in diesem Quadrate enthaltenen Progressionen.

Die Analyse des einen von den 49 gleichen Quadratfeldern hat ergeben, dass die Seite dieses Quadrates = 7 angenommen die ganze Diagonale = 10, daher die halbe = 5 ist. Aus diesen Grössen und ihren gegenseitigen Abschnitten haben wir auf *Pag. 142* alle Theile des Körpers des Neugeborenen so entstehen sehen, dass ihre Grössenbestimmungen mit den Bestimmungen des menschlichen Wachsthumsgesetzes vollkommen übereinstimmen. Auf solche Weise erscheinen die Dimensionsverhältnisse der einzelnen Körpertheile den Grössenbestimmungen des Einzelnquadrates entnommen und jene früher genannten Halbmesser 30, 20, 10 bestimmen genau die Oberlänge, die Unterlänge und die Breiten-Dimensionen des Rumpfes; die Höhe von der Nasenwurzel zum Scheitel, die Länge des Brustbeines, des Vorderarmes und des Fusses ergibt 7, die Länge von der Nasenwurzel zum Kinn und die halbe Bauchlänge d. i. der Halbmesser des Nabelkreises 5, die halbe Körperlänge zeigt 25, daher die ganze Körperlänge 50; die Brustbeinlänge des Neugeborenen verhält sich zu der des Erwachsenen wie 7 : 22, steht also genau im Verhältnisse des Durchmessers zur Peripherie; der Kopfumfang wächst um 3×7, der Brustumfang um 9×7, der gerade Kopfdurchmesser von 12 auf 3×7, das Schlüsselbein und die Hand auf 3×7; der erste und wichtigste Zeitabschnitt des Wachsthumes enthält 3×7 Monate, in der Körperlänge des Erwachsenen ist 7, 25mal enthalten, oder was dasselbe sagen will, die halbe Körperlänge des Neugeborenen (25), welche gleich ist der Mittelzahl des Siebener-Quadrates, ergibt 7 mal genommen ebenso die vollendete Körperlänge des Erwachsenen (175) wie jede Mittelzahl

$$\left(\frac{w^2+1}{2}\right)$$

multiplicirt mit der Wurzel die Summe einer Reihe des Tetragrammes

$$S = \frac{w^3+w}{2}$$

ausmacht.

Die Zahl 10 beziffert den Durchmesser des Nabelkreises, von welchem die Construction der menschlichen Gestalt ausgeht; die Diagonale des Quadrates durch die Zahl 10 bestimmt ergibt mit der Seite 7 alle Grössenbestimmungen, wie sie die Einzelntheile der menschlichen Figur an sich tragen.

Da endlich die Reihe der Leitzahlen der Tetragramme von den Wurzeln 3 — 25 die Reihe der Zeitbestimmungen der einzelnen Wachsthumsepochen

ergibt, so wird es wohl ferner keinem Zweifel unterliegen, dass das Wesen und die Construction der Tetragramme überhaupt und die des Siebener-Quadrates insbesondere mit den mathematischen Grundlagen und der Gliederung des Gesetzes des menschlichen Wachsthumes und Baues arithmetisch und geometrisch d. i. mathematisch übereinstimmen, dass also die Berechtigung des Alterthumes zu dem Ausspruche: „Das magische Siebener-Quadrat enthält die Grundbestimmungen des menschlichen Körperbaues“ mathematisch begründet sei.

Diese mathematischen Grundbestimmungen sind hier entnommen den Längenbestimmungen der Radien, den Grössenbestimmungen der Proportional-Linien des Einzelnquadrates, der Leitzahl, der Wurzel, der Mittelzahl, dem um die Einheit vermehrten Quadrate als der Summe der gleichen Paare, der Summe einer Reihe, den Differenzen der einzelnen Reihen des Tetragrammes, und den Anfangs- und Endgliedern der Haupt-Diagonalen.

Wenn man nun diesem Leitfaden folgen will, so wird es Gegenstand fernerer Forschung sein, alle bei den einzelnen Naturerscheinungen bis jetzt durch Maass, Zahl und Gewicht festgestellten Thatsachen mit diesen Fundamental-Grössen der verschiedenen Tetragramme zu vergleichen, um ein gleiches oder ähnliches Verhalten beider zu constatiren und somit die Allgemeingültigkeit und das oberste Gesetz dieses Systemes zu ergründen und darzuthun.

E r r a t a.

Pag.	IV	Zeile	21	von oben	lies: vor lauter Theilen statt: von.
„	47	„	5	„ unten	lies: welchen statt: welcher.
„	75	„	14	„ oben	lies: Entfernung statt: Entfernungen.
„	104	„	7	„ „	lies: **dritten** statt: **vierten.**
„	143	„	5	„ unten	lies: Nro. 80 statt: 81.

TAFELN

der

TETRAGRAMME

aus den

Zahlen 3—26

und der

algebraischen Formeln

für

alle magischen Quadrate.

Tetragramme
aus dem Quadrate der Zahl
3.

№ 1.

	4	9	2	15
	3	5	7	„
	8	1	6	„
15	„	„	15	15

Totalsumme aller Zahlen = 45.

Die natürliche Zahlenreihe von 10 angefangen eingetragen:

№ 2.

	13	18	11	42
	12	14	16	„
	17	10	15	„
42	„	„	42	42

Das Doppelte der natürlichen Zahlenreihe eingetragen:

№ 3.

	8	18	4	30
	6	10	14	„
	16	2	12	„
30	„	„	30	30

Tetragramme für gebrochene Exponenten oder Wurzelgrössen.

№ 4.

$a^{\frac{4}{2}}$	$a^{\frac{9}{2}}$	$a^{\frac{2}{2}}$
$a^{\frac{3}{2}}$	$a^{\frac{5}{2}}$	$a^{\frac{7}{2}}$
$a^{\frac{8}{2}}$	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{6}{2}}$

$a^{\frac{15}{2}} = a^7 \sqrt{a}$

Totalsumme aller Zahlen $= a^{\frac{45}{2}} = a^{22} \sqrt{a}$

№ 5.

$a^{\frac{4}{3}}$	$a^{\frac{9}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a^{\frac{3}{3}}$	$a^{\frac{5}{3}}$	$a^{\frac{7}{3}}$
$a^{\frac{8}{3}}$	$a^{\frac{1}{3}}$	$a^{\frac{6}{3}}$

$a^{\frac{15}{3}} = a^5$

Totalsumme aller Zahlen $= a^{\frac{45}{3}} = a^{15}$

№ 6.

$a^{\frac{4}{b}}$	$a^{\frac{9}{b}}$	$a^{\frac{2}{b}}$
$a^{\frac{3}{b}}$	$a^{\frac{5}{b}}$	$a^{\frac{7}{b}}$
$a^{\frac{8}{b}}$	$a^{\frac{1}{b}}$	$a^{\frac{6}{b}}$

$a^{\frac{w^2 + w}{2b}}$

Totalsumme aller Zahlen $= a^{\frac{w^4 + w^2}{2b}}$

Modificirtes Tetragramm der Zahl
3.

Die Potenzreihe aus der Wurzel 3 eingetragen.

№ 7

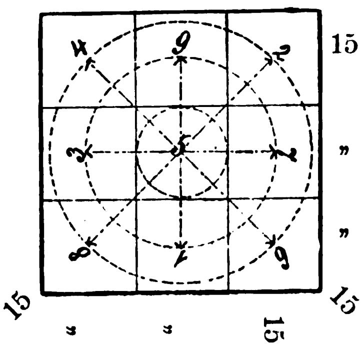
4 81	9 19.683	2 9
3 27	5 243	7 2.187
8 6.561	1 3	6 729

Das Product einer Reihe = **14,348.907.**

Das Product aller Zahlen des Tetragrammes:
2.954,312.706,550.833,698.643.

Tetragramm und Kreis-Construction
aus dem Quadrate der Zahl
3.

№ 8.



Totalsumme aller Zahlen = 45.

Tetragramm

aus dem Quadrate der Zahl

4.

№ 9.

4	*14*	*15*	1	34
9	7	6	*12*	„
5	11	10	*8*	„
16	*2*	*3*	13	„
„	„	„	34	

34 34

Totalsumme aller Zahlen = **136.**

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl

4.

№ 10.

13	*53*	*57*	1	124
33	25	21	*45*	„
17	41	37	*29*	„
61	*5*	*9*	49	„
„	„	„	124	

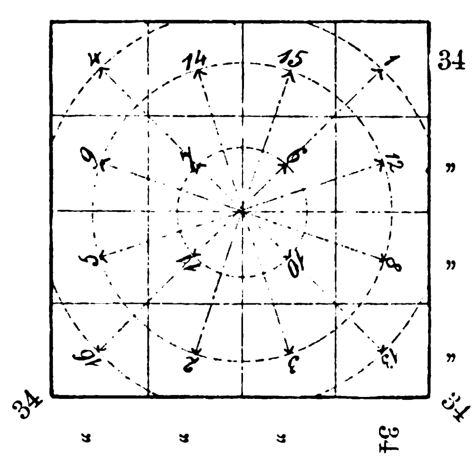
124 124

Totalsumme aller Zahlen = **496.**

Tetragramm und Kreis-Construction aus dem Quadrate der Zahl

4.

№ 11.



Totalsumme aller Zahlen = **136.**

Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl

5.

№ 12.

11	*24*	*7*	*20*	**3**	65
4	**12**	*25*	**8**	*16*	„
17	*5*	**13**	*21*	*9*	„
10	**18**	*1*	**14**	*22*	„
23	*6*	*19*	*2*	**15**	„
„	„	„	„	65	

65 (Diagonalen) 65

Totalsumme aller Zahlen = 325.

Modificirtes Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl

5.

№ 13.

11	*24*	*7*	*20*	**3**	65
24	**12**	*20*	**8**	*16*	80
17	*30*	**13**	*26*	*9*	95
30	**18**	*26*	**14**	*22*	110
23	*36*	*19*	*32*	**15**	125
105	120	85	100	65	

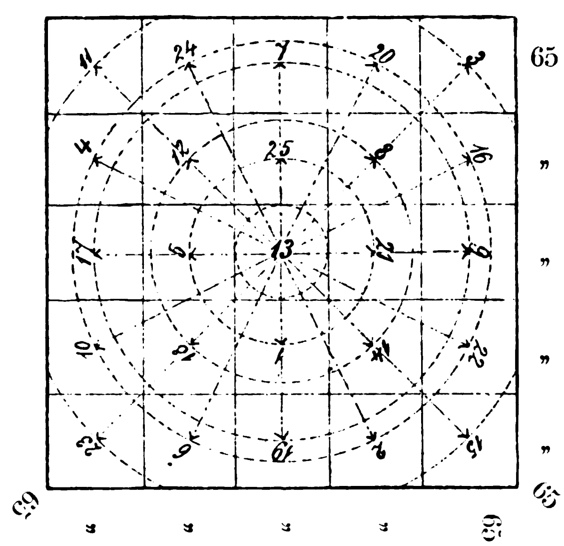
65 (Diagonalen) 65

Totalsumme aller Zahlen = 475.

Tetragramm und Kreis-Construction
aus dem
Quadrate der Zahl

5.

№ 14.



Totalsumme aller Zahlen = 325.

Modificirtes Tetragramm der Zahl
5.

Die Potenzreihe aus der Wurzel 3 eingetragen.

№ 15.

11 *177.147*	*24* *282.429.* *536 481*	*7* *2187*	*20* *3.486.784.* *401*	*3* *27*
4 *81*	*12* *531.441*	*25* *847.288.* *609.443*	*8* *6561*	*16* *43.046.* *721*
17 *129,140,* *163*	*5* *243*	*13* *1.594.* *323*	*21* *10.460.* *353.203*	*9* *19.683*
10 *59049*	*18* *387.420.* *489*	*1* *3*	*14* *4.782.969*	*22* *31.381.* *059.609*
23 *94.143* *178.827*	*6* *729*	*19* *1,162,261,* *467*	*2* *9*	*15* *14.348.* *907*

Das Product einer Reihe:
9,840,769,055,935,707,821,438,962,927.223.
Das Product aller Zahlen des Tetragrammes = 3^{325}.

Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl
6.

№ 16.

6	*32*	*3*	*34*	*35*	1	111
7	11	*27*	*28*	8	*30*	„
24	*14*	16	15	*23*	*19*	„
13	*20*	22	21	*17*	*18*	„
25	29	*10*	*9*	26	*12*	„
36	*5*	*33*	*4*	*2*	31	„
111 „	„	„	„	„	111	111

Totalsumme aller Zahlen = 666.

Modificirtes Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl
6.

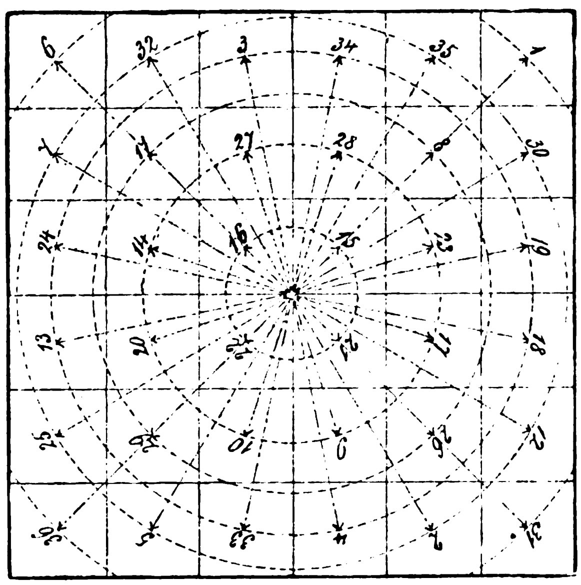
№ 17.

21	*125*	*9*	*133*	*137*	1	426
25	41	*105*	*109*	29	*117*	„
93	*53*	61	57	*89*	*73*	„
49	*77*	85	81	*65*	*69*	„
97	113	*37*	*33*	101	*45*	„
141	*17*	*129*	*13*	*5*	121	„
426 „	„	„	„	„	426	426

Totalsumme aller Zahlen = 2556.

Tetragramm und Kreis-Construction
aus dem Quadrate der Zahl
6.

№ 18.



111 „ „ „ „ „

111 „ „ „ „ „ 111 111

Totalsumme aller Zahlen = 666.

Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl

7.

№ 19.

22	47	16	41	10	35	**4**	175
5	**23**	48	17	42	**11**	29	„
30	6	**24**	49	**18**	36	12	„
13	31	7	**25**	43	19	37	„
38	14	**32**	1	**26**	44	20	„
21	**39**	8	33	2	**27**	45	„
46	15	40	9	34	3	**28**	„
„	„	„	„	„	„	175	

175 (Diagonale links) — 175 (Diagonale rechts)

Totalsumme aller Zahlen = **1225.**

Modificirtes Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl

7.

№ 20.

22	47	16	41	10	35	**4**	175
47	**23**	41	17	35	**11**	29	203
30	55	**24**	49	**18**	43	12	231
55	31	49	**25**	43	19	37	259
38	63	**32**	57	**26**	51	20	287
63	**39**	57	33	51	**27**	45	315
46	71	40	65	34	59	**28**	343
301	329	259	287	217	245	175	

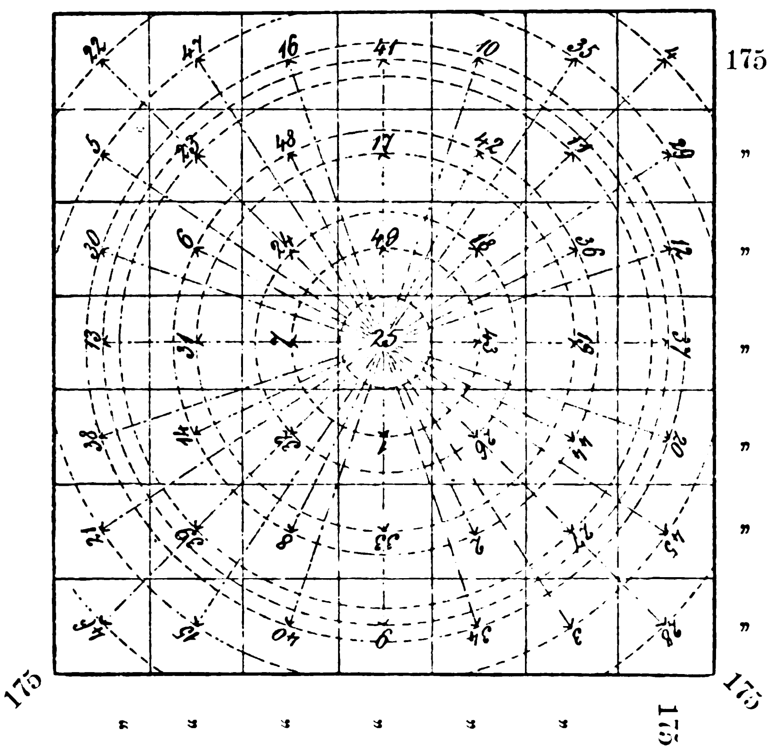
175 (Diagonale links) — 175 (Diagonale rechts)

Totalsumme aller Zahlen = **1813.**

Tetragramm und Kreis-Construction aus dem Quadrate der Zahl

7

№ 21.



Totalsumme aller Zahlen = **1225.**

Tetragramm

aus dem Quadrate der Zahl

8.

№ 22.

8	*58*	*62*	*4*	*5*	*59*	*63*	**1**	260
9	**15**	*51*	*53*	*52*	*54*	**10**	*16*	„
48	*18*	**22**	*44*	*45*	**19**	*23*	*41*	„
25	*39*	*35*	**29**	**28**	*38*	*34*	*32*	„
33	*31*	*27*	**37**	**36**	*30*	*26*	*40*	„
24	*42*	**46**	*20*	*21*	**43**	*47*	*17*	„
49	**55**	*11*	*13*	*12*	*14*	**50**	*56*	„
64	*2*	*6*	*60*	*61*	*3*	*7*	**57**	„
„	„	„	„	„	„	„	260	

260 260

Totalsumme aller Zahlen 2080.

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl

8.

№ 23.

29	*229*	*245*	*13*	*17*	*233*	*249*	**1**	1016
33	**57**	*201*	*209*	*205*	*213*	**37**	*61*	„
189	*69*	**85**	*173*	*177*	**73**	*89*	*161*	„
97	*153*	*137*	**113**	**109**	*149*	*133*	*125*	„
129	*121*	*105*	**145**	**141**	*117*	*101*	*157*	„
93	*165*	**181**	*77*	*81*	**169**	*185*	*65*	„
193	**217**	*41*	*49*	*45*	*53*	**197**	*221*	„
253	*5*	*21*	*237*	*241*	*9*	*25*	**225**	„
„	„	„	„	„	„	„	1016	

1016 1016

Totalsumme aller Zahlen 8128.

Tetragramm

und

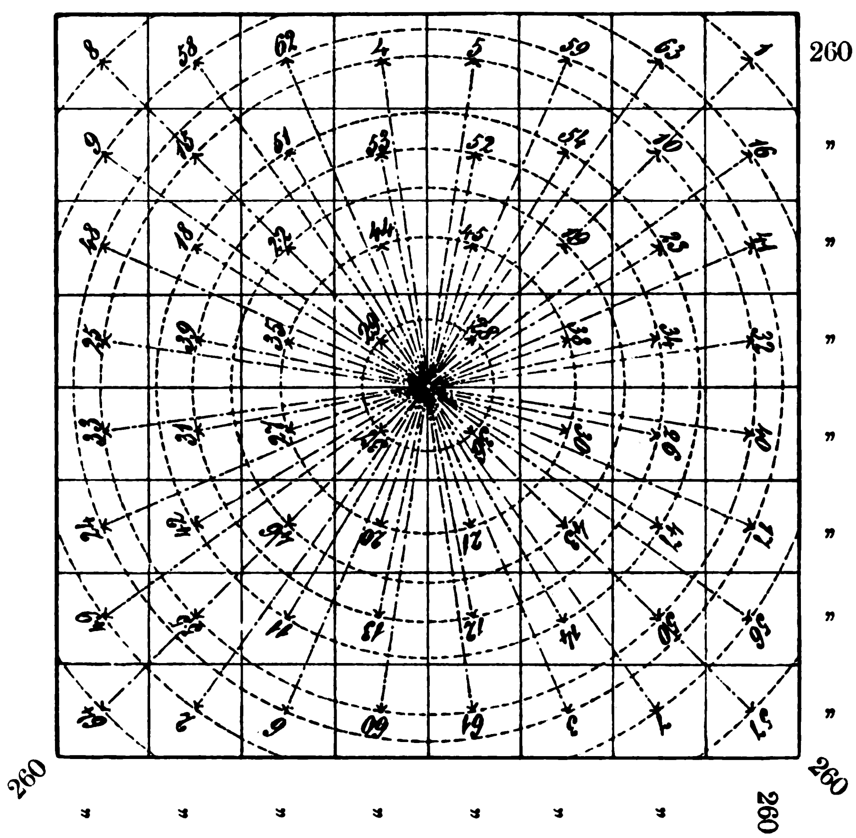
Kreis-Construction

aus dem

Quadrate der Zahl

8.

№ 24.



Totalsumme aller Zahlen = **2080.**

Tetragramm
aus dem Quadrate der Zahl
9.

№ 25.

	37	*78*	*29*	*70*	*21*	*62*	*13*	*54*	**5**	369
	6	**38**	*79*	*30*	*71*	*22*	*63*	**14**	*46*	„
	47	*7*	**39**	*80*	*31*	*72*	**23**	*55*	*15*	„
	16	*48*	*8*	**40**	*81*	**32**	*64*	*24*	*56*	„
	57	*17*	*49*	*9*	**41**	*73*	*33*	*65*	*25*	„
	26	*58*	*18*	**50**	*1*	**42**	*74*	*34*	*66*	„
	67	*27*	**59**	*10*	*51*	*2*	**43**	*75*	*35*	„
	36	**68**	*19*	*60*	*11*	*52*	*3*	**44**	*76*	„
	77	*28*	*69*	*20*	*61*	*12*	*53*	*4*	**45**	„
369	„	„	„	„	„	„	„	„	369	369

Totalsumme aller Zahlen = **3321.**

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl
9.

№ 26.

	37	*78*	*29*	*70*	*21*	*62*	*13*	*54*	**5**	369
	78	**38**	*70*	*30*	*62*	*22*	*54*	**14**	*46*	414
	47	*88*	**39**	*80*	*31*	*72*	**23**	*64*	*15*	459
	88	*48*	*80*	**40**	*72*	**32**	*64*	*24*	*56*	504
	57	*98*	*49*	*90*	**41**	*82*	*33*	*74*	*25*	549
	98	*58*	*90*	**50**	*82*	**42**	*74*	*34*	*66*	594
	67	*108*	**59**	*100*	*51*	*92*	**43**	*84*	*35*	639
	108	**68**	*100*	*60*	*92*	*52*	*84*	**44**	*76*	684
	77	*118*	*69*	*110*	*61*	*102*	*53*	*94*	**45**	729
369	657	702	585	630	513	558	441	486	369	369

Totalsumme aller Zahlen = **4941.**

Tetragramm

und

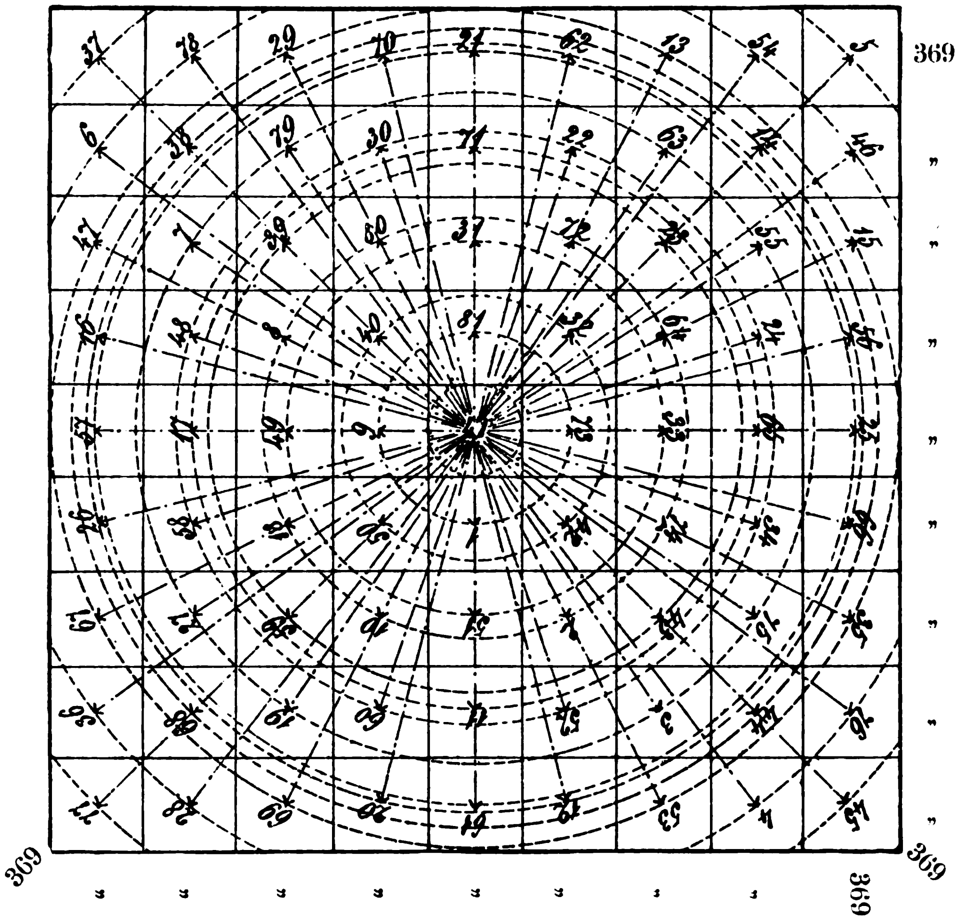
Kreis - Construction

aus dem

Quadrate der Zahl

9.

№ 27



Totalsumme aller Zahlen = 3321.

Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl
10.

№ 28.

10	*92*	*8*	*94*	*95*	*6*	*97*	*3*	*99*	**1**	505
11	**19**	*83*	*17*	*86*	*85*	*14*	*88*	**12**	*90*	„
80	*22*	**28**	*74*	*25*	*76*	*77*	**23**	*29*	*71*	„
31	*69*	*33*	**37**	*65*	*66*	**34**	*68*	*62*	*40*	„
60	*42*	*58*	*44*	**46**	**45**	*57*	*53*	*49*	*51*	„
41	*59*	*43*	*54*	**56**	**55**	*47*	*48*	*52*	*50*	„
70	*32*	*63*	**67**	*36*	*35*	**64**	*38*	*39*	*61*	„
21	*72*	**78**	*27*	*75*	*26*	*24*	**73**	*79*	*30*	„
81	**89**	*18*	*84*	*16*	*15*	*87*	*13*	**82**	*20*	„
100	*9*	*93*	*7*	*5*	*96*	*4*	*98*	*2*	**91**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	505	

505 505

Totalsumme aller Zahlen = 5050.

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl
10.

№ 29.

37	*365*	*29*	*373*	*377*	*21*	*385*	*9*	*493*	**1**	1990
41	**73**	*329*	*65*	*341*	*337*	*53*	*349*	**45**	*357*	„
317	*85*	**109**	*293*	*97*	*301*	*305*	**89**	*113*	*281*	„
121	*273*	*129*	**145**	*257*	*261*	**133**	*269*	*245*	*157*	„
237	*165*	*229*	*173*	**181**	**177**	*225*	*209*	*193*	*201*	„
161	*233*	*169*	*213*	**221**	**217**	*185*	*189*	*205*	*197*	„
277	*125*	*249*	**265**	*141*	*137*	**253**	*149*	*153*	*241*	„
81	*285*	**309**	*105*	*297*	*101*	*93*	**289**	*313*	*117*	„
321	**353**	*69*	*333*	*61*	*57*	*345*	*49*	**325**	*77*	„
397	*33*	*369*	*25*	*17*	*381*	*13*	*389*	*5*	**361**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	1990	

1990 1990

Totalsumme aller Zahlen = 19900.

Tetragramm

und

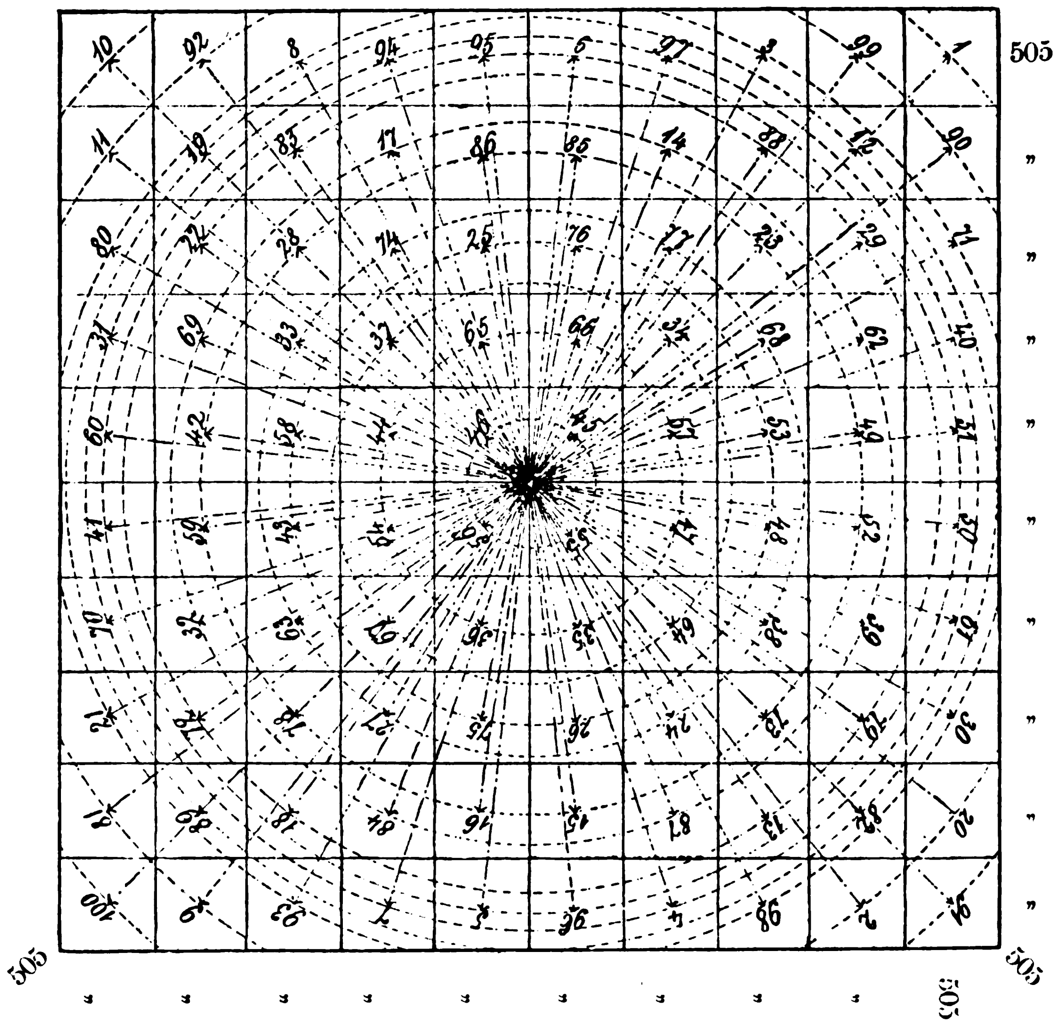
Kreis - Construction

aus dem

Quadrate der Zahl

10.

№ 30.



Totalsumme aller Zahlen = 5050.

Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl 11.

№ 31.

56	117	46	107	36	97	26	87	16	77	6	671
7	57	118	47	108	37	98	27	88	17	67	"
68	8	58	119	48	109	38	99	28	78	18	"
19	69	9	59	120	49	110	39	89	29	79	"
80	20	70	10	60	121	50	100	40	90	30	"
31	81	21	71	11	61	111	51	101	41	91	"
92	32	82	22	72	1	62	112	52	102	42	"
43	93	33	83	12	73	2	63	113	53	103	"
104	44	94	23	84	13	74	3	64	114	54	"
55	105	34	95	24	85	14	75	4	65	115	"
116	45	106	35	96	25	86	15	76	5	66	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	671	

671 (Diagonale) — 671 (Diagonale)

Totalsumme aller Zahlen 7381.

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl 11.

№ 32.

56	117	46	107	36	97	26	87	16	77	6	671
117	57	107	47	97	37	87	27	77	17	67	737
68	129	58	119	48	109	38	99	28	89	18	803
129	69	119	59	109	49	99	39	89	29	79	869
80	141	70	131	60	121	50	111	40	101	30	935
141	81	131	71	121	61	111	51	101	41	91	1001
92	153	82	143	72	133	62	123	52	113	42	1067
153	93	143	83	133	73	123	63	113	53	103	1133
104	165	94	155	84	145	74	135	64	125	54	1199
165	105	155	95	145	85	135	75	125	65	115	1265
116	177	106	167	96	157	86	147	76	137	66	1331
1221	1287	1111	1177	1001	1067	891	957	781	847	671	

671 (Diagonale) — 671 (Diagonale)

Totalsumme aller Zahlen = 11011.

Tetragramm

und

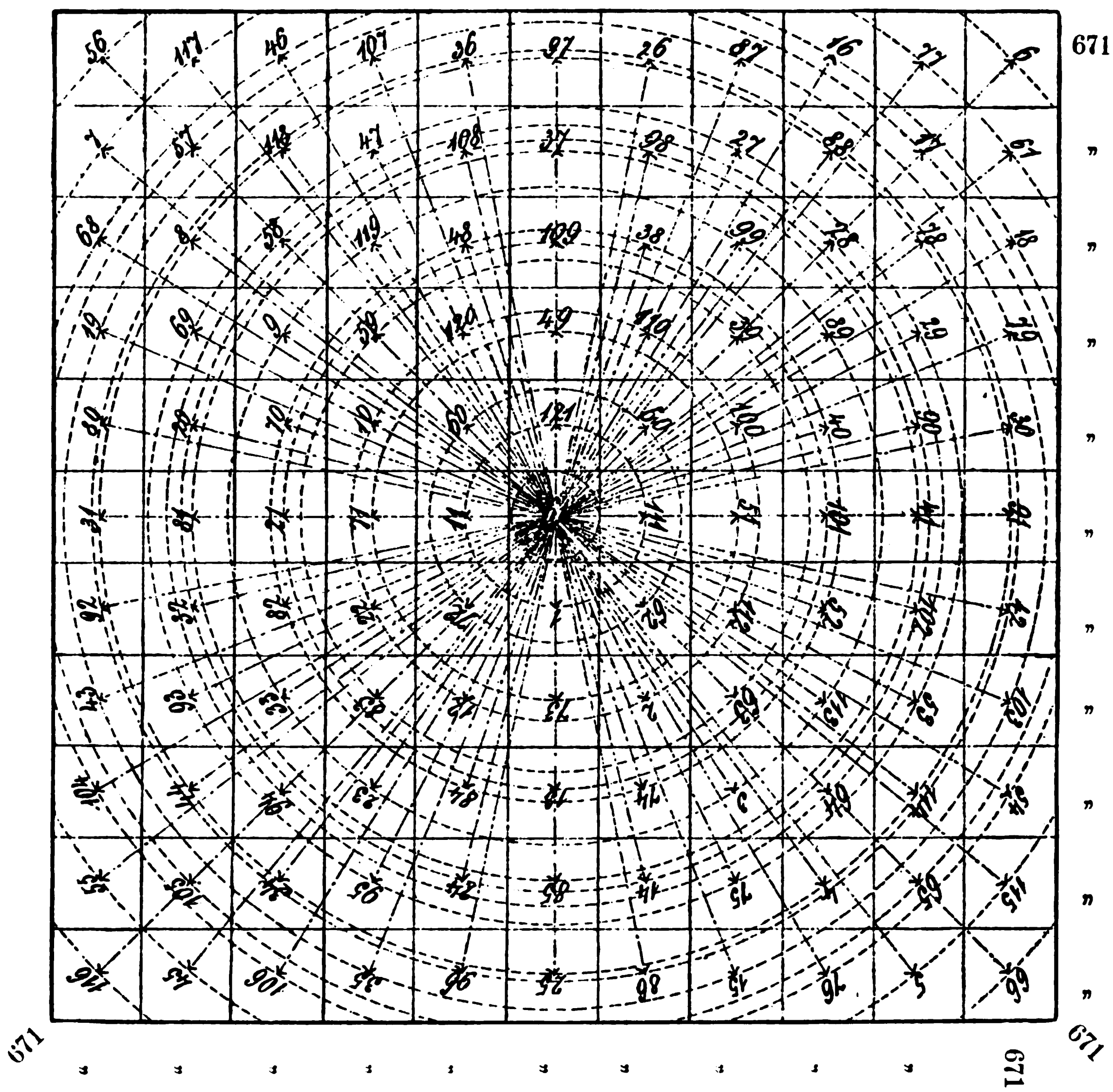
Kreis-Construction

aus dem

Quadrate der Zahl

11.

№ 33.



Totalsumme aller Zahlen — 7381.

Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl
12.

№ 34.

12	134	142	4	8	138	139	5	9	135	143	1	870
13	23	123	129	17	127	126	20	124	130	14	24	„
120	26	34	112	116	30	31	113	117	27	35	109	„
37	107	39	45	101	103	102	104	40	46	98	48	„
96	50	94	52	56	90	91	53	57	87	59	85	„
61	83	63	81	77	67	66	80	76	70	72	72	„
73	71	75	69	65	79	78	68	64	82	62	84	„
60	86	58	88	92	54	55	89	93	51	95	49	„
97	47	99	105	41	43	42	44	100	106	38	108	„
36	110	118	28	32	114	115	29	33	111	119	25	„
121	131	15	21	125	19	18	128	16	22	122	132	„
144	2	10	136	140	6	7	137	141	3	11	133	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	870	

870 870

Totalsumme aller Zahlen = 10440.

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl
12.

№ 35.

45	533	565	13	29	549	553	17	33	537	559	1	3444
49	89	489	513	65	505	501	77	493	517	53	93	„
477	101	133	445	461	117	121	449	465	105	137	433	„
145	425	153	177	401	409	405	413	157	181	389	189	„
381	197	373	205	221	357	361	209	225	345	233	337	„
241	329	249	321	305	265	261	317	301	277	293	285	„
289	281	297	273	257	313	309	269	253	325	245	333	„
237	341	229	349	365	213	217	353	369	201	377	193	„
385	185	393	417	161	169	165	173	397	421	149	429	„
141	437	469	109	125	453	457	113	129	441	473	97	„
481	521	57	81	497	73	69	509	61	85	485	525	„
573	5	37	541	357	21	25	345	561	9	41	529	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	3444	

3444 3444

Totalsumme aller Zahlen = 41328.

Tafel XIV.

Tetragramm

und

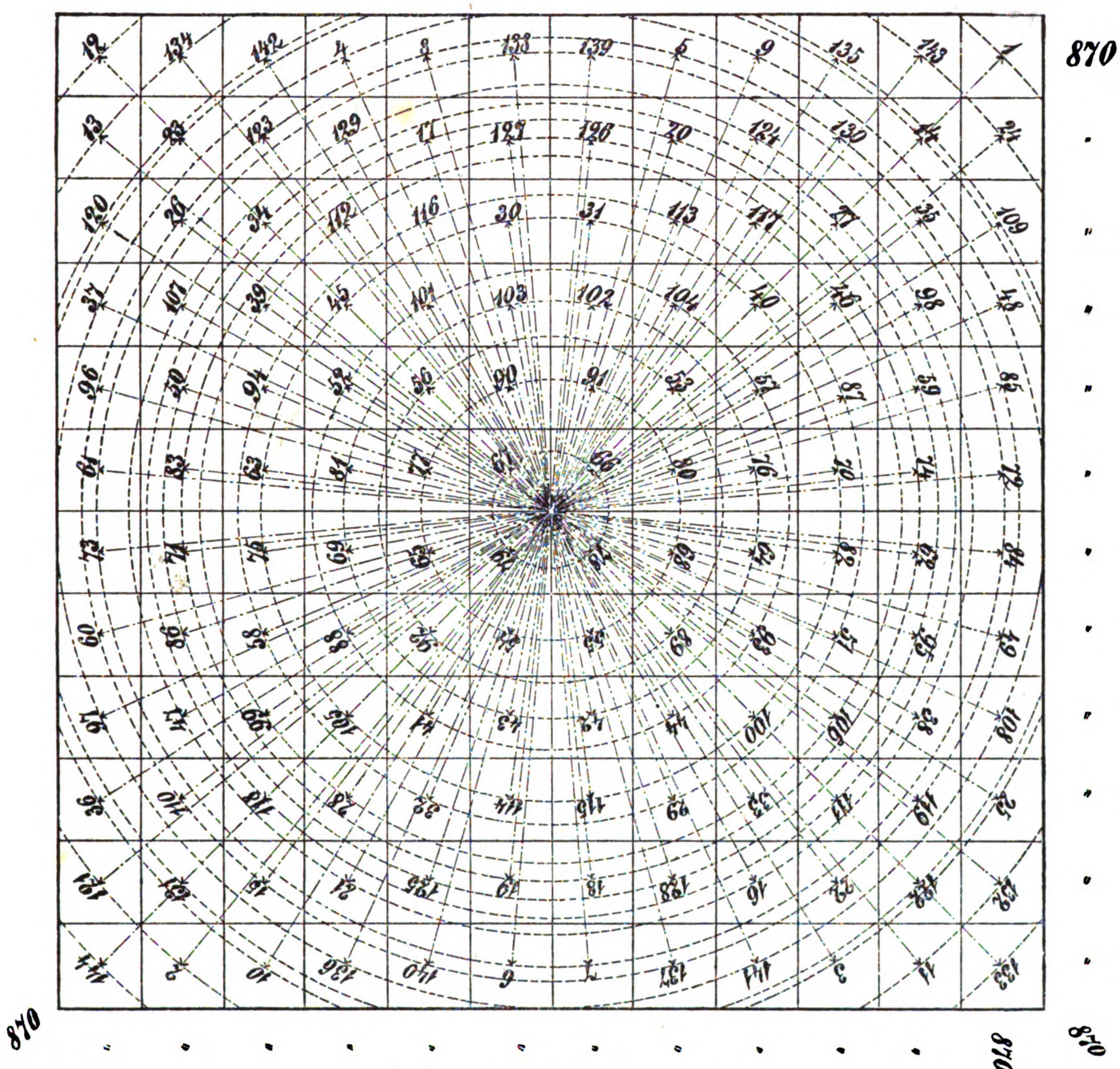
Kreis - Construction

aus dem

Quadrate der Zahl

12.

№ 36.



Totalsumme aller Zahlen = 10440.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

13.

№ 37.

79	*164*	*67*	*152*	*55*	*140*	*43*	*128*	*31*	*116*	*19*	*104*	**7**	1105
8	**80**	*165*	*68*	*153*	*56*	*141*	*44*	*129*	*32*	*117*	**20**	*92*	„
93	*9*	**81**	*166*	*69*	*154*	*57*	*142*	*45*	*130*	**33**	*105*	*21*	„
22	*94*	*10*	**82**	*167*	*70*	*155*	*58*	*143*	**46**	*118*	*34*	*106*	„
107	*23*	*95*	*11*	**83**	*168*	*71*	*156*	**59**	*131*	*47*	*119*	*35*	„
36	*108*	*24*	*96*	*12*	**84**	*169*	**72**	*144*	*60*	*132*	*48*	*120*	„
121	*37*	*109*	*25*	*97*	*13*	**85**	*157*	*73*	*145*	*61*	*133*	*49*	„
50	*122*	*38*	*110*	*26*	**98**	*1*	**86**	*158*	*74*	*146*	*62*	*134*	„
135	*51*	*123*	*39*	**111**	*14*	*99*	*2*	**87**	*159*	*75*	*147*	*63*	„
64	*136*	*52*	**124**	*27*	*112*	*15*	*100*	*3*	**88**	*160*	*76*	*148*	„
149	*65*	**137**	*40*	*125*	*28*	*113*	*16*	*101*	*4*	**89**	*161*	*77*	„
78	**150**	*53*	*138*	*41*	*126*	*29*	*114*	*17*	*102*	*5*	**90**	*162*	„
163	*66*	*151*	*54*	*139*	*42*	*127*	*30*	*115*	*18*	*103*	*6*	**91*	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1105	

1105 1105

Totalsumme aller Zahlen = 14365.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

13.

№ 38.

	79	164	67	152	55	140	43	128	31	116	19	104	**7**	1105
	164	**80**	152	68	140	56	128	44	116	32	104	**20**	92	1196
	93	178	**81**	166	69	154	57	142	45	130	**33**	118	21	1287
	178	94	166	**82**	154	70	142	58	130	**46**	118	34	106	1378
	107	192	95	180	**83**	168	71	156	**59**	144	47	132	35	1469
	192	108	180	96	168	**84**	156	**72**	144	60	132	48	120	1560
	121	206	109	194	97	182	**85**	170	73	158	61	146	49	1651
	206	122	194	110	182	**98**	170	**86**	158	74	146	62	134	1742
	135	220	123	208	**111**	196	99	184	**87**	172	75	160	63	1833
	220	136	208	**124**	196	112	184	100	172	**88**	160	76	148	1924
	149	234	**137**	222	125	210	113	198	101	186	**89**	174	77	2015
	234	**150**	222	138	210	126	198	114	186	102	174	**90**	162	2106
	163	248	151	236	139	224	127	212	115	200	103	188	**91**	2197
1105	2041	2132	1885	1976	1729	1820	1573	1664	1417	1508	1261	1352	1105	1105

Totalsumme aller Zahlen = 21463.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

14.

№ 39.

14	184	12	186	10	188	189	8	191	5	193	3	195	**1**	1379
15	**27**	171	25	173	23	176	175	20	178	18	180	**16**	182	"
168	30	**40**	158	38	160	161	36	163	33	165	**31**	41	155	"
43	153	45	**53**	145	51	148	147	48	150	**46**	152	142	56	"
140	58	138	60	**66**	132	63	134	135	**61**	67	129	69	127	"
71	125	73	123	75	**79**	119	120	**76**	122	116	82	114	84	"
112	86	110	88	108	90	**92**	**91**	107	103	95	101	97	99	"
85	111	87	109	89	104	**106**	**105**	93	94	102	96	100	98	"
126	72	124	74	117	**121**	78	77	**118**	80	81	115	83	113	"
57	139	59	130	**136**	65	133	64	62	**131**	137	68	128	70	"
154	44	143	**151**	52	146	50	49	149	47	**144**	54	55	141	"
29	156	**166**	39	159	37	35	162	34	164	32	**157**	167	42	"
169	**181**	26	172	24	174	22	21	177	19	179	17	**170**	28	"
196	13	185	11	187	9	7	190	6	192	4	194	2	**183**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1379	

1379 (diagonal, lower left) — 1379 (diagonal, lower right)

Totalsumme aller Zahlen — 19306.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

14.

№ 40.

53	733	45	741	37	749	753	29	761	17	769	9	777	**1**	5474
57	**105**	681	97	689	89	701	697	77	709	69	717	**61**	725	"
669	117	**157**	629	149	637	641	141	649	129	657	**121**	161	617	"
169	609	177	**209**	577	201	589	585	189	597	**181**	605	565	221	"
557	229	549	237	**261**	525	249	533	537	**241**	265	513	273	505	"
281	497	289	489	297	**313**	473	477	**301**	485	461	325	453	333	"
445	341	437	349	429	357	**365**	**361**	425	409	377	401	385	393	"
337	441	345	433	353	413	**421**	**417**	369	373	405	381	397	389	"
501	285	493	293	465	**481**	309	305	**469**	317	321	457	329	449	"
225	553	233	517	**541**	257	529	253	245	**521**	545	269	509	277	"
613	173	569	**601**	205	581	197	193	593	185	**573**	213	217	561	"
113	621	**661**	153	633	145	137	645	133	653	125	**625**	665	165	"
673	**721**	101	685	93	693	85	81	705	73	713	65	**677**	109	"
781	49	737	41	745	33	25	757	21	765	13	773	5	**729**	"

5474 " " " " " " " " " " " " " 5474 5474

Totalsumme aller Zahlen = 76636.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

15.

№ 41.

106	219	92	205	78	191	64	177	50	163	36	149	22	135	**8**	1695
9	**107**	220	93	206	79	192	65	178	51	164	37	150	**23**	121	"
122	10	**108**	221	94	207	80	193	66	179	52	165	**38**	136	24	"
25	123	11	**109**	222	95	208	81	194	67	180	**53**	151	39	137	"
138	26	124	12	**110**	223	96	209	82	195	**68**	166	54	152	40	"
41	139	27	125	13	**111**	224	97	210	**83**	181	69	167	55	153	"
154	42	140	28	126	14	**112**	225	**98**	196	84	182	70	168	56	"
57	155	43	141	29	127	15	**113**	211	99	197	85	183	71	169	"
170	58	156	44	142	30	**128**	1	**114**	212	100	198	86	184	72	"
73	171	59	157	45	**143**	16	129	2	**115**	213	101	199	87	185	"
186	74	172	60	**158**	31	144	17	130	3	**116**	214	102	200	88	"
89	187	75	**173**	46	159	32	145	18	131	4	**117**	215	103	201	"
202	90	**188**	61	174	47	160	33	146	19	132	5	**118**	216	104	"
105	**203**	76	189	62	175	48	161	34	147	20	133	6	**119**	217	"
218	91	204	77	190	63	176	49	162	35	148	21	134	7	**120**	"
1695	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1695	1695

Totalsumme aller Zahlen = 25425.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

15.

№ 42.

	106	*219*	*92*	*205*	*78*	*191*	*64*	*177*	*50*	*163*	*36*	*149*	*22*	*135*	**8**	1695
	219	**107**	*205*	*93*	*191*	*79*	*177*	*65*	*163*	*51*	*149*	*37*	*135*	**23**	*121*	1815
	122	*235*	**108**	*221*	*94*	*207*	*80*	*193*	*66*	*179*	*52*	*165*	**38**	*151*	*24*	1935
	235	*123*	*221*	**109**	*207*	*95*	*193*	*81*	*179*	*67*	*165*	**53**	*151*	*39*	*137*	2055
	138	*251*	*124*	*237*	**110**	*223*	*96*	*209*	*82*	*195*	**68**	*181*	*54*	*167*	*40*	2175
	251	*139*	*237*	*125*	*223*	**111**	*209*	*97*	*195*	**83**	*181*	*69*	*167*	*35*	*153*	2295
	154	*267*	*140*	*253*	*126*	*239*	**112**	*225*	**98**	*211*	*84*	*197*	*70*	*183*	*56*	2415
	267	*155*	*253*	*141*	*239*	*127*	*225*	**113**	*211*	*99*	*197*	*85*	*183*	*71*	*169*	2535
	170	*283*	*156*	*269*	*142*	*255*	**128**	*241*	**114**	*227*	*100*	*213*	*86*	*199*	*72*	2655
	283	*171*	*269*	*157*	*255*	**143**	*241*	*129*	*227*	**115**	*213*	*101*	*199*	*87*	*185*	2775
	186	*299*	*172*	*285*	**158**	*271*	*144*	*257*	*130*	*243*	**116**	*229*	*102*	*215*	*88*	2895
	299	*187*	*285*	**173**	*271*	*159*	*257*	*145*	*243*	*131*	*229*	**117**	*215*	*103*	*201*	3015
	202	*315*	**188**	*301*	*174*	*287*	*160*	*273*	*146*	*259*	*132*	*245*	**118**	*231*	*104*	3135
	315	**203**	*301*	*189*	*287*	*175*	*273*	*161*	*259*	*147*	*245*	*133*	*231*	**119**	*217*	3255
	218	*331*	*204*	*317*	*190*	*303*	*176*	*289*	*162*	*275*	*148*	*261*	*134*	*247*	**120**	3375
1695	3165	3285	2955	3075	2745	2865	2535	2655	2325	2445	2115	2235	1905	2025	1695	1695

Totalsumme aller Zahlen = 38025.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

16.

№ 43.

16	242	254	4	12	246	250	8	9	247	251	5	13	243	255	**1**	2056
17	**31**	227	237	21	27	231	233	232	234	22	28	228	238	**18**	32	„
224	34	**46**	212	220	38	42	216	217	39	43	213	221	**35**	47	209	„
49	207	51	**61**	197	203	55	201	200	58	198	204	**52**	62	194	64	„
192	66	190	68	**76**	182	186	72	73	183	187	**69**	77	179	79	177	„
81	175	83	173	85	**91**	167	169	168	170	**86**	92	164	94	162	96	„
160	98	158	100	156	102	**106**	152	153	**103**	107	149	109	147	111	145	„
113	143	115	141	117	139	135	**121**	**120**	138	134	124	132	126	130	128	„
129	127	131	125	133	123	119	**137**	**136**	122	118	140	116	142	114	144	„
112	146	110	148	108	150	**154**	104	105	**151**	155	101	157	99	159	97	„
161	95	163	93	165	**171**	87	89	88	90	**166**	172	84	174	82	176	„
80	178	78	180	**188**	70	74	184	185	71	75	**181**	189	67	191	65	„
193	63	195	**205**	53	59	199	57	56	202	54	60	**196**	206	50	208	„
48	210	**222**	36	44	214	218	40	41	215	219	37	45	**211**	223	33	„
225	**239**	19	29	229	235	23	25	24	26	230	236	20	30	**226**	240	„
256	2	14	244	252	6	10	248	249	7	11	245	253	3	15	**241**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	2056	2056

2056

Totalsumme aller Zahlen = 32896.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

16.

№ 44.

61	965	1013	13	45	981	997	29	33	985	1001	17	49	969	1017	**1**	8176
65	**121**	905	945	81	105	921	929	925	933	85	109	909	949	**69**	125	„
893	133	**181**	845	877	149	165	861	865	153	169	849	881	**137**	185	833	„
193	825	201	**241**	785	809	217	801	797	229	789	813	**205**	245	773	253	„
765	261	757	269	**301**	725	741	285	289	729	745	**273**	305	713	313	705	„
321	697	329	689	337	**361**	665	673	669	677	**341**	365	653	373	645	381	„
637	389	629	397	621	405	**421**	605	609	**409**	425	593	433	585	441	577	„
449	569	457	561	465	553	537	**481**	**477**	549	533	493	525	501	517	509	„
513	505	521	497	529	489	473	**545**	**541**	485	469	557	461	565	453	573	„
445	581	437	589	429	597	**613**	413	417	**601**	617	401	625	393	633	385	„
641	377	649	369	657	**681**	345	353	349	357	**661**	685	333	693	325	701	„
317	709	309	717	**749**	277	293	733	737	281	297	**721**	753	265	761	257	„
769	249	777	**817**	209	233	793	225	221	805	213	237	**781**	821	197	829	„
189	837	**885**	141	173	853	869	157	161	857	873	145	177	**841**	889	129	„
897	**953**	73	113	913	937	89	97	93	101	917	941	77	117	**901**	957	„
1021	5	53	973	1005	21	37	989	993	25	41	977	1009	9	57	**961**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	8176	

8176 8176

Totalsumme aller Zahlen = 130816.

Tafel XXIII.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

17.

№ 45.

137	282	121	266	105	250	89	234	73	218	57	202	41	186	25	170	**9**	2465
10	**138**	283	122	267	106	251	90	235	74	219	58	203	42	187	**26**	154	"
155	11	**139**	284	123	268	107	252	91	236	75	220	59	204	**43**	171	27	"
28	156	12	**140**	285	124	269	108	253	92	237	76	221	**60**	188	44	172	"
173	29	157	13	**141**	286	125	270	109	254	93	238	**77**	205	61	189	45	"
46	174	30	158	14	**142**	287	126	271	110	255	**94**	222	78	206	62	190	"
191	47	175	31	159	15	**143**	288	127	272	**111**	239	95	223	79	207	63	"
64	192	48	176	32	160	16	**144**	289	**128**	256	112	240	96	224	80	208	"
209	65	193	49	177	33	161	17	**145**	273	129	257	113	241	97	225	81	"
82	210	66	194	50	178	34	**162**	1	**146**	274	130	258	114	242	98	226	"
227	83	211	67	195	51	**179**	18	163	2	**147**	275	131	259	115	243	99	"
100	228	84	212	68	**196**	35	180	19	164	3	**148**	276	132	260	116	244	"
245	101	229	85	**213**	52	197	36	181	20	165	4	**149**	277	133	261	117	"
118	246	102	**230**	69	214	53	198	37	182	21	166	5	**150**	278	134	262	"
263	119	**247**	86	231	70	215	54	199	38	183	22	167	6	**151**	279	135	"
136	**264**	103	248	87	232	71	216	55	200	39	184	23	168	7	**152**	280	"
281	120	265	104	249	88	233	72	217	56	201	40	185	24	169	8	**153**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2465	

2465 2465

Totalsumme aller Zahlen = 41905.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

17.

№ 46.

	137	282	121	266	105	250	89	234	73	218	57	202	41	186	25	170	**9**	2465
	282	**138**	266	122	250	106	234	90	218	74	202	58	186	42	170	**26**	154	2618
	155	300	**139**	284	123	268	107	252	91	236	75	220	59	204	**43**	188	27	2771
	300	156	284	**140**	268	124	252	108	236	92	220	76	204	**60**	188	44	172	2924
	173	318	157	302	**141**	286	125	270	109	254	93	238	**77**	222	61	206	45	3077
	318	174	302	158	286	**142**	270	126	254	110	238	**94**	222	78	206	62	190	3230
	191	336	175	320	159	304	**143**	288	127	272	**111**	256	55	240	79	224	63	3383
	336	192	320	176	304	160	288	**144**	272	**128**	256	112	240	96	224	80	208	3536
	209	354	193	338	177	322	161	306	**145**	290	129	274	113	258	97	242	81	3689
	354	210	338	194	322	178	306	**162**	290	**146**	274	130	258	114	242	98	226	3842
	227	372	211	356	195	340	**179**	324	163	308	**147**	292	131	276	115	260	99	3995
	372	228	356	212	340	**196**	324	180	308	164	292	**148**	276	132	260	116	244	4148
	245	390	229	374	**213**	358	197	342	181	326	165	310	**149**	294	133	278	117	4301
	390	246	374	**230**	358	214	342	198	326	182	310	166	294	**150**	278	134	262	4454
	263	408	**247**	392	231	376	215	360	199	344	183	328	167	312	**151**	296	135	4607
	408	**264**	392	248	376	232	360	216	344	200	328	184	312	168	296	**152**	280	4760
	281	426	265	410	249	394	233	378	217	362	201	346	185	330	169	314	**153**	4913
2465	4641	4794	4369	4522	4097	4250	3825	3978	3553	3706	3281	3434	3009	3162	2737	2890	2465	2465

Totalsumme aller Zahlen 62713.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

18.

№ 47.

18	308	16	310	14	312	12	314	315	10	317	7	319	5	321	3	323	**1**	2925
19	**35**	291	33	293	31	295	29	298	297	26	300	24	302	22	304	**20**	306	„
288	38	**52**	274	50	276	48	278	279	46	281	43	283	41	285	**39**	53	271	„
55	269	57	**69**	257	67	259	65	262	261	62	264	60	266	**58**	268	254	72	„
252	74	250	76	**86**	240	84	242	243	82	245	79	247	**77**	87	237	89	235	„
91	233	93	231	95	**103**	223	101	226	225	98	228	**96**	230	220	106	218	108	„
216	110	214	112	212	114	**120**	206	117	208	209	**115**	121	203	123	201	125	199	„
127	197	129	195	131	193	133	**137**	189	190	**134**	192	186	140	184	142	182	144	„
180	146	178	148	176	150	174	152	**154**	**153**	173	169	157	167	159	165	161	163	„
145	179	147	177	149	175	151	170	**172**	**171**	155	156	168	158	166	160	164	162	„
198	128	196	130	194	132	187	**191**	136	135	**188**	138	139	185	141	183	143	181	„
109	215	111	213	113	204	**210**	119	207	118	116	**205**	211	122	202	124	200	126	„
234	92	232	94	221	**229**	102	224	100	99	227	97	**222**	104	105	219	107	217	„
73	251	75	238	**248**	85	241	83	81	244	80	246	78	**239**	249	88	236	90	„
270	56	255	**267**	68	258	66	260	64	63	263	61	265	59	**256**	70	71	253	„
37	272	**286**	51	275	49	277	47	45	280	44	282	42	284	40	**273**	287	54	„
289	**305**	34	292	32	294	30	296	28	27	299	25	301	23	303	21	**290**	36	„
324	17	309	15	311	13	313	11	9	316	8	318	6	320	4	322	2	**307**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	2925	

2925 2925

Totalsumme aller Zahlen = 52650.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

18.

№ 48.

69	1229	61	1237	53	1245	45	1253	1257	37	1265	25	1273	17	1281	9	1289	**1**	11646
73	**137**	1161	129	1169	121	1177	113	1189	1185	101	1197	93	1205	85	1213	**77**	1221	„
1149	149	**205**	1093	197	1101	189	1109	1113	181	1121	169	1129	161	1137	**153**	209	1081	„
217	1073	225	**273**	1025	265	1033	257	1045	1041	245	1053	237	1061	**229**	1069	1013	283	„
1005	293	997	301	**341**	957	333	965	969	325	977	313	985	**305**	345	945	353	937	„
361	929	369	921	377	**409**	889	401	901	897	389	909	**381**	917	877	421	869	429	„
861	437	853	445	845	453	**477**	821	465	829	833	**457**	481	809	489	801	497	793	„
505	785	513	777	521	769	529	**545**	753	757	**533**	765	741	557	733	565	725	573	„
717	581	709	589	701	597	693	605	**613**	**609**	689	673	625	665	633	657	641	649	„
577	713	585	705	593	697	601	677	**685**	**681**	617	621	669	629	661	637	653	645	„
789	509	781	517	773	525	745	**761**	541	537	**749**	549	553	737	561	729	569	721	„
433	857	441	849	449	813	**837**	473	825	469	461	**817**	841	485	805	493	797	501	„
933	365	925	373	881	**913**	405	893	397	393	905	385	**885**	413	417	873	425	865	„
289	1001	297	949	**989**	337	961	329	321	973	317	981	309	**953**	993	349	941	357	„
1077	221	1017	**1065**	260	1029	261	1037	253	249	1049	241	1057	233	**1021**	277	281	1009	„
145	1085	**1141**	201	1097	193	1105	185	177	1117	173	1125	165	1133	157	**1089**	1145	213	„
1153	**1217**	133	1165	125	1173	117	1181	109	105	1193	97	1201	89	1209	81	**1157**	141	„
1293	65	1233	57	1241	49	1249	41	33	1261	29	1269	21	1277	13	1285	5	**1225**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	11646	

11646 11646

Totalsumme aller Zahlen = 209628.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

19.

№ 49.

172	353	154	335	136	317	118	299	100	281	82	263	64	245	46	227	28	209	**10**	3439
11	**173**	354	155	336	137	318	119	300	101	282	83	264	65	246	47	228	**29**	191	"
192	12	**174**	355	156	337	138	319	120	301	102	283	84	265	66	247	**48**	210	30	"
31	193	13	**175**	356	157	338	139	320	121	302	103	284	85	266	**67**	229	49	211	"
212	32	194	14	**176**	357	158	339	140	321	122	303	104	285	**86**	248	68	230	50	"
51	213	33	195	15	**177**	358	159	340	141	322	123	304	**105**	267	87	249	69	231	"
232	52	214	34	196	16	**178**	359	160	341	142	323	**124**	286	106	268	88	250	70	"
71	233	53	215	35	197	17	**179**	360	161	342	**143**	305	125	287	107	269	89	251	"
252	72	234	54	216	36	198	18	**180**	361	**162**	324	144	306	126	288	108	270	90	"
91	253	73	235	55	217	37	199	19	**181**	343	163	325	145	307	127	289	109	271	"
272	92	254	74	236	56	218	38	**200**	1	**182**	344	164	326	146	308	128	290	110	"
111	273	93	255	75	237	57	**219**	20	201	2	**183**	345	165	327	147	309	129	291	"
292	112	274	94	256	76	**238**	39	220	21	202	3	**184**	346	166	328	148	310	130	"
131	293	113	275	95	**257**	58	239	40	221	22	203	4	**185**	347	167	329	149	311	"
312	132	294	114	**276**	77	258	59	240	41	222	23	204	5	**186**	348	168	330	150	"
151	313	133	**295**	96	277	78	259	60	241	42	223	24	205	6	**187**	349	169	331	"
332	152	**314**	115	296	97	278	79	260	61	242	43	224	25	206	7	**188**	350	170	"
171	**333**	134	315	116	297	98	279	80	261	62	243	44	225	26	207	8	**189**	351	"
352	153	334	135	316	117	298	99	280	81	262	63	244	45	226	27	208	9	**190**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	3439	

3439   3439

Totalsumme aller Zahlen = 65341.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

19.

№ 50.

172	353	154	335	136	317	118	299	100	281	82	263	64	245	46	227	28	209	**10**	3439
353	**173**	335	155	317	137	299	119	281	101	263	83	245	65	227	47	209	**29**	131	3629
192	373	**174**	355	156	337	138	319	120	301	102	283	84	265	66	247	**48**	229	30	3819
373	193	355	**175**	337	157	319	139	301	121	283	103	265	85	247	**67**	229	49	211	4009
212	393	194	375	**176**	357	158	339	140	321	122	303	104	285	**86**	267	68	249	50	4199
393	213	375	195	357	**177**	339	159	321	141	303	123	285	**105**	267	87	249	69	231	4389
232	413	214	395	196	377	**178**	359	160	341	142	323	**124**	305	106	287	88	269	70	4579
413	233	395	215	377	197	359	**179**	341	161	323	**143**	305	125	287	107	269	89	251	4769
252	433	234	415	216	397	198	379	**180**	361	**162**	343	144	325	126	307	108	289	90	4959
433	253	415	235	397	217	379	199	361	**181**	343	163	325	145	307	127	289	109	271	5149
272	453	254	435	236	417	218	399	**200**	381	**182**	363	164	345	146	327	128	309	110	5339
453	273	435	255	417	237	399	**219**	381	201	363	**183**	345	165	327	147	309	129	291	5529
292	473	274	455	256	437	**238**	419	220	401	202	383	**184**	365	166	347	148	329	130	5719
473	293	455	276	437	**257**	419	239	401	221	383	203	365	**185**	347	167	329	149	311	5909
312	493	294	475	**276**	457	258	439	240	421	222	403	204	385	**186**	367	168	349	150	6099
493	313	475	**295**	457	277	439	259	421	241	403	223	385	205	367	**187**	349	169	331	6289
332	513	**314**	495	296	477	278	459	260	441	242	423	224	405	206	387	**188**	369	170	6479
513	**333**	495	315	477	297	459	279	441	261	423	243	405	225	387	207	369	**189**	351	6669
352	533	334	515	316	497	298	479	280	461	262	443	244	425	226	407	208	389	**190**	6859
6517	6707	6175	6365	5833	6023	5491	5681	5149	5339	4807	4997	4465	4655	4123	4313	3781	3971	3439	

3439 3439

Totalsumme aller Zahlen 97831.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

20.

№ 51.

20	382	398	4	16	386	394	8	12	390	391	9	13	387	395	5	17	383	399	**1**	4010
21	**39**	363	377	25	35	367	373	29	371	370	32	368	374	26	36	364	378	**22**	40	„
360	42	**58**	344	356	46	54	348	352	50	51	349	353	47	55	345	357	**43**	59	341	„
61	339	63	**77**	325	335	67	73	329	331	330	332	68	74	326	336	**64**	78	322	80	„
320	82	318	84	**96**	306	314	88	92	310	311	89	93	307	315	**85**	97	303	99	301	„
101	299	103	297	105	**115**	287	293	109	291	290	112	288	294	**106**	116	284	118	282	120	„
280	122	278	124	276	126	**134**	268	272	130	131	269	273	**127**	135	265	137	263	139	261	„
141	259	143	257	145	255	147	**153**	249	251	250	252	**148**	154	246	156	244	158	242	160	„
240	162	238	164	236	166	234	168	**172**	230	231	**169**	173	227	175	225	177	223	179	221	„
181	219	183	217	185	215	187	213	209	**191**	**190**	212	208	194	206	196	204	198	202	200	„
201	199	203	197	205	195	207	193	189	**211**	**210**	192	188	214	186	216	184	218	182	220	„
180	222	178	224	176	226	174	228	**232**	170	171	**229**	233	167	235	165	237	163	239	161	„
241	159	243	157	245	155	247	**253**	149	151	150	152	**248**	254	146	256	144	258	142	260	„
140	262	138	264	136	266	**274**	128	132	270	271	129	133	**267**	275	125	277	123	279	121	„
281	119	283	117	285	**295**	107	113	289	111	110	292	108	114	**286**	296	104	298	102	300	„
100	302	98	304	**316**	86	94	308	312	90	91	309	313	87	95	**305**	317	83	319	81	„
321	79	323	**337**	65	75	327	333	69	71	70	72	328	334	66	76	**324**	338	62	340	„
60	342	**358**	44	56	346	354	48	52	350	351	49	53	347	355	45	57	**343**	359	41	„
361	**379**	23	37	365	375	27	33	369	31	30	372	28	34	366	376	24	38	**362**	380	„
400	2	18	384	396	6	14	388	392	10	11	389	393	7	15	385	397	3	19	**381**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	4010	

4010 4010

Totalsumme aller Zahlen = 80200.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

20.

№ 52.

77	1525	1589	13	61	1541	1573	29	45	1557	1561	33	49	1545	1577	17	65	1529	1593	**1**	15980
81	**153**	1449	1505	97	137	1465	1489	113	1481	1477	125	1469	1493	101	141	1453	1509	**85**	157	„
1437	165	**229**	1373	1421	181	213	1389	1405	197	201	1393	1409	185	217	1377	1425	**169**	233	1361	„
241	1353	249	**305**	1297	1337	265	289	1313	1321	1317	1325	269	293	1301	1341	**253**	309	1285	317	„
1277	325	1269	333	**381**	1221	1253	349	365	1237	1241	353	369	1225	1257	**337**	385	1209	393	1201	„
401	1193	409	1185	417	**457**	1145	1169	433	1161	1157	445	1149	1173	**421**	461	1133	469	1125	477	„
1117	485	1109	493	1101	501	**533**	1069	1085	517	521	1073	1089	**505**	537	1057	545	1049	553	1041	„
561	1033	569	1025	577	1017	585	**609**	993	1001	997	1005	**589**	613	981	621	973	629	965	637	„
957	645	949	653	941	661	933	669	**685**	917	921	**673**	689	905	697	897	705	889	713	881	„
721	873	729	865	737	857	745	849	833	**761**	**757**	845	829	773	821	781	813	789	805	797	„
801	793	809	785	817	777	825	769	753	**841**	**837**	765	749	853	741	861	733	869	725	877	„
717	885	709	893	701	901	693	909	**925**	677	681	**913**	929	665	937	657	945	649	953	641	„
961	633	969	625	977	617	985	**1009**	593	601	597	605	**989**	1013	581	1021	573	1029	565	1037	„
557	1045	549	1053	541	1061	**1093**	509	525	1077	1081	513	529	**1065**	1097	497	1105	489	1113	481	„
1121	473	1129	465	1137	**1177**	425	449	1153	441	437	1165	429	453	**1141**	1181	413	1189	405	1197	„
397	1205	389	1213	**1261**	341	373	1229	1245	357	361	1233	1249	345	377	**1217**	1265	329	1273	321	„
1281	313	1289	**1345**	257	297	1305	1329	273	281	277	285	1309	1333	261	301	**1293**	1349	245	1357	„
237	1365	**1429**	173	221	1381	1413	189	205	1397	1401	193	209	1385	1417	177	225	**1369**	1433	161	„
1441	**1513**	89	145	1457	1497	105	129	1473	121	117	1485	109	133	1461	1501	93	149	**1445**	1517	„
1597	5	69	1533	1581	21	53	1549	1565	37	41	1553	1569	25	57	1537	1585	9	73	**1521**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	15980	

15980 15980

Totalsumme aller Zahlen = 319600.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

21.

№ 53.

211	432	191	412	171	392	151	372	131	352	111	332	91	312	71	292	51	272	31	252	**11**	4641
12	**212**	433	152	413	172	393	152	373	132	353	112	333	92	313	72	293	52	273	**32**	232	„
233	13	**213**	434	193	414	173	394	153	374	133	354	113	334	93	314	73	294	**53**	253	33	„
34	234	14	**214**	435	194	415	174	395	154	375	134	355	114	335	94	315	**74**	274	54	254	„
255	35	235	15	**215**	436	195	416	175	396	155	376	135	356	115	336	**95**	295	75	275	55	„
56	256	36	236	16	**216**	437	196	417	176	397	156	377	136	357	**116**	316	96	296	76	276	„
277	57	257	37	237	17	**217**	438	197	418	177	398	157	378	**137**	337	117	317	97	297	77	„
78	278	58	258	38	238	18	**218**	439	198	419	178	399	**158**	358	138	338	118	318	98	298	„
299	79	279	59	259	39	239	19	**219**	440	199	420	**179**	379	159	359	139	339	119	319	99	„
100	300	80	280	60	260	40	240	20	**220**	441	**200**	400	180	380	160	360	140	340	120	320	„
321	101	301	81	281	61	261	41	241	21	**221**	421	201	401	181	381	161	361	141	341	121	„
122	322	102	302	82	282	62	262	42	**242**	1	**222**	422	202	402	182	382	162	362	142	342	„
343	123	323	103	303	83	283	63	**263**	22	243	2	**223**	423	203	403	183	383	163	363	143	„
144	344	124	324	104	304	84	**284**	43	264	23	244	3	**224**	424	204	404	184	384	164	364	„
365	145	345	125	325	105	**305**	64	285	44	265	24	245	4	**225**	425	205	405	185	385	165	„
166	366	146	346	126	**326**	85	306	65	286	45	266	25	246	5	**226**	426	206	406	186	386	„
387	167	367	147	**347**	106	327	86	307	66	287	46	267	26	247	6	**227**	427	207	407	187	„
188	388	168	**368**	127	348	107	328	87	308	67	288	47	268	27	248	7	**228**	428	208	408	„
409	189	**389**	148	369	128	349	108	329	88	309	68	289	48	269	28	249	8	**229**	429	209	„
210	**410**	169	390	149	370	129	350	109	330	89	310	69	290	49	270	29	250	9	**230**	430	„
431	190	411	170	391	150	371	130	351	110	331	90	311	70	291	50	271	30	251	10	**231**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	4641	

4641 4641

Totalsumme aller Zahlen = 97461.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

21.

№ 54.

211	432	191	412	171	392	151	372	131	352	111	332	91	312	71	292	51	272	31	252	**11**	4641
432	**212**	412	192	392	172	372	152	352	132	332	112	312	92	292	72	272	52	252	**32**	232	4872
233	454	**213**	434	193	414	173	394	153	374	133	354	113	334	93	314	73	294	**53**	274	33	5103
454	234	434	**214**	414	194	394	174	374	154	354	134	334	114	314	94	294	**74**	274	54	254	5334
255	476	235	456	**215**	436	195	416	175	396	155	376	135	356	115	336	**95**	316	75	296	55	5565
476	256	456	236	436	**216**	416	196	396	176	376	156	356	136	336	**116**	316	96	296	76	276	5796
277	498	257	478	237	458	**217**	438	197	418	177	398	157	378	**137**	358	117	338	97	318	77	6027
498	278	478	258	458	238	438	**218**	418	198	398	178	378	**158**	358	138	338	118	318	98	298	6258
299	520	279	500	259	480	239	460	**219**	440	199	420	**179**	400	159	380	139	360	119	340	99	6489
520	300	500	280	480	260	460	240	440	**220**	420	**200**	400	180	380	160	360	140	340	120	320	6720
321	542	301	522	281	502	261	482	241	462	**221**	442	201	422	181	402	161	382	141	362	121	6951
542	322	522	302	502	282	482	262	462	**242**	442	**222**	422	202	402	182	382	162	362	142	342	7182
343	564	323	544	303	524	283	504	**263**	484	243	464	**223**	444	203	424	183	404	163	384	143	7413
564	344	544	324	524	304	504	**284**	484	264	464	244	444	**224**	424	204	404	184	384	164	364	7644
365	586	345	566	325	546	**305**	526	285	506	265	486	245	466	**225**	446	205	426	185	406	165	7875
586	366	566	346	546	**326**	526	306	506	286	486	266	466	246	446	**226**	426	206	406	186	386	8106
387	608	367	588	**347**	568	327	548	307	528	287	508	267	488	247	468	**227**	448	207	428	187	8337
608	388	588	**368**	568	348	548	328	528	308	508	288	488	268	468	248	448	**228**	428	208	408	8568
409	630	**389**	610	369	590	349	570	329	550	309	530	289	510	269	490	249	470	**229**	450	209	8799
630	**410**	610	390	590	370	570	350	550	330	530	310	510	290	490	270	470	250	450	**230**	430	9030
431	652	411	632	391	612	371	592	351	572	331	552	311	532	291	512	271	492	251	472	**231**	9261
8841	9072	8421	8652	8001	8232	7581	7812	7161	7392	6741	6972	6321	6552	5901	6132	5481	5712	5061	5292	4641	

4641 4641

Totalsumme aller Zahlen — **145971.**

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

22.

№ 55.

22	464	20	466	18	468	16	470	14	472	473	12	475	9	477	7	479	5	481	3	483	**1**	5335
23	**43**	443	41	445	39	447	37	449	35	452	451	32	454	30	456	28	458	26	460	**24**	462	"
440	46	**64**	422	62	424	60	426	58	428	429	56	431	53	433	51	435	49	437	**47**	65	419	"
67	417	69	**85**	401	83	403	81	405	79	408	407	76	410	74	412	72	414	**70**	416	398	88	"
396	90	394	92	**105**	380	104	382	102	384	385	100	387	97	389	95	391	**93**	107	377	109	375	"
111	373	113	371	115	**127**	359	125	361	123	364	363	120	366	118	368	**116**	370	356	130	354	132	"
352	134	350	136	348	138	**148**	338	146	340	341	144	343	141	345	**139**	149	335	151	333	153	331	"
155	329	157	327	159	325	161	**169**	317	167	320	319	164	322	**162**	324	314	172	312	174	310	176	"
308	178	306	180	304	182	302	184	**190**	296	187	298	299	**185**	191	293	193	291	195	289	197	287	"
199	285	201	283	203	281	205	279	207	**211**	275	276	**208**	278	272	214	270	216	268	218	266	220	"
264	222	262	224	260	226	258	228	256	230	**232**	**231**	255	251	235	249	237	247	239	245	241	243	"
221	263	223	261	225	259	227	257	229	252	**254**	**253**	233	234	250	236	248	238	246	240	244	242	"
286	200	284	202	282	204	280	206	273	**277**	210	209	**274**	212	213	271	215	269	217	267	219	265	"
177	307	179	305	181	303	183	294	**300**	189	297	188	186	**295**	301	192	292	194	290	196	288	198	"
330	156	328	158	326	160	315	**323**	168	318	166	165	321	163	**316**	170	171	313	173	311	175	309	"
133	351	135	349	137	336	**346**	147	339	145	143	342	142	344	140	**337**	347	150	334	152	332	154	"
374	112	372	114	357	**369**	126	360	124	362	122	121	365	119	367	117	**358**	128	129	355	131	353	"
89	395	91	378	**392**	105	381	103	383	101	99	386	98	388	96	390	94	**379**	393	106	376	110	"
418	68	399	**415**	84	402	82	404	80	406	78	77	409	75	411	73	413	71	**400**	86	87	397	"
45	420	**438**	63	423	61	425	59	427	57	55	430	54	432	52	434	50	436	48	**421**	439	66	"
441	**461**	42	444	40	446	38	448	36	450	34	33	453	31	455	29	457	27	459	25	**442**	44	"
484	21	465	19	467	17	469	15	471	13	11	474	10	476	8	478	6	480	4	482	2	**463**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5335	

5335 5335

Totalsumme aller Zahlen = 117370.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

22.

№ 56.

85	1853	77	1861	69	1869	61	1877	53	1885	1889	45	1897	33	1905	25	1913	17	1921	9	1929	1	21274
89	169	1769	161	1777	153	1785	145	1793	137	1805	1801	125	1813	117	1821	109	1829	101	1837	93	1845	"
1757	181	253	1685	245	1693	237	1701	229	1709	1713	221	1721	209	1729	201	1737	193	1745	185	257	1673	"
265	1665	273	337	1601	329	1609	321	1617	313	1629	1625	301	1637	293	1645	285	1653	277	1661	1589	349	"
1581	357	1573	365	421	1517	413	1525	405	1533	1537	397	1545	385	1553	377	1561	369	425	1505	433	1497	"
441	1489	449	1481	457	505	1433	497	1441	489	1453	1449	477	1461	469	1469	461	1477	1421	517	1413	525	"
1405	533	1397	541	1389	549	589	1349	581	1357	1361	573	1361	561	1377	553	593	1337	601	1329	609	1321	"
617	1313	625	1305	633	1297	641	673	1265	665	1277	1273	653	1285	645	1293	1253	685	1245	693	1237	701	"
1229	709	1221	717	1213	725	1205	733	757	1181	745	1189	1193	737	761	1169	769	1161	777	1153	785	1145	"
793	1137	801	1129	809	1121	817	1113	825	841	1097	1101	829	1109	1085	853	1077	861	1069	869	1061	877	"
1053	885	1045	893	1037	901	1029	909	1021	917	925	921	1017	1001	937	993	945	985	953	977	961	969	"
881	1049	889	1041	897	1033	905	1025	913	1005	1013	1009	929	933	997	941	989	949	981	957	973	965	"
1141	797	1133	805	1125	813	1117	821	1089	1105	837	833	1093	845	849	1081	857	1073	865	1065	873	1057	"
705	1225	713	1217	721	1209	729	1173	1197	753	1185	749	741	1177	1201	765	1165	773	1157	781	1149	789	"
1317	621	1309	629	1301	637	1257	1289	669	1269	661	657	1281	649	1261	677	681	1249	689	1241	697	1233	"
529	1401	537	1393	545	1341	1381	585	1353	577	569	1365	565	1373	557	1345	1385	597	1333	605	1325	613	"
1493	445	1485	453	1425	1473	501	1437	493	1445	485	481	1457	473	1465	465	1429	509	513	1417	521	1409	"
353	1577	361	1509	1565	417	1521	409	1529	401	393	1541	389	1549	381	1557	373	1513	1569	429	1501	437	"
1669	269	1593	1657	333	1605	325	1613	317	1621	309	305	1633	297	1641	289	1649	281	1597	341	345	1585	"
177	1677	1749	249	1689	241	1697	233	1705	225	217	1717	213	1725	205	1733	197	1741	189	1681	1753	261	"
1761	1841	165	1773	157	1781	149	1789	141	1797	133	129	1809	121	1817	113	1825	105	1833	97	1765	173	"
1933	81	1857	73	1865	65	1873	57	1881	49	41	1893	37	1901	29	1909	21	1917	13	1925	5	1849	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	21274	

21274   21274

Totalsumme aller Zahlen = 468028.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

23.

№ 57.

254	519	232	497	210	475	188	453	166	431	144	409	122	387	100	365	78	343	56	321	34	299	**12**	6095
13	**255**	520	233	498	211	476	189	454	167	432	145	410	123	388	101	366	79	344	57	322	**35**	277	"
278	14	**256**	521	234	499	212	477	190	455	168	433	146	411	124	389	102	367	80	345	**58**	300	36	"
37	279	15	**257**	522	235	500	213	478	191	456	169	434	147	412	125	390	103	368	**81**	323	59	301	"
302	38	280	16	**258**	523	236	501	214	479	192	457	170	435	148	413	126	391	**104**	346	82	324	60	"
61	303	39	281	17	**259**	524	237	502	215	480	193	458	171	436	149	414	**127**	369	105	347	83	325	"
326	62	304	40	282	18	**260**	525	238	503	216	481	194	459	172	437	**150**	392	128	370	106	348	84	"
85	327	63	305	41	283	19	**261**	526	239	504	217	482	195	460	**173**	415	151	393	129	371	107	349	"
350	86	328	64	306	42	284	20	**262**	527	240	505	218	483	**196**	438	174	416	152	394	130	372	108	"
109	351	87	329	65	307	43	285	21	**263**	528	241	506	**219**	461	197	439	175	417	153	395	131	373	"
374	110	352	88	330	66	308	44	286	22	**264**	529	**242**	484	220	462	198	440	176	418	154	396	132	"
133	375	111	353	89	331	67	309	45	287	23	**265**	507	243	485	221	463	199	441	177	419	155	397	"
398	134	376	112	354	90	332	68	310	46	**288**	1	**266**	508	244	486	222	464	200	442	178	420	156	"
157	399	135	377	113	355	91	333	69	**311**	24	289	2	**267**	509	245	487	223	465	201	443	179	421	"
422	158	400	136	378	114	356	92	**334**	47	312	25	290	3	**268**	510	246	488	224	466	202	444	180	"
181	423	159	401	137	379	115	**357**	70	335	48	313	26	291	4	**269**	511	247	489	225	467	203	445	"
446	182	424	160	402	138	**380**	93	358	71	336	49	314	27	292	5	**270**	512	248	490	226	468	204	"
205	447	183	425	161	**403**	116	381	94	359	72	337	50	315	28	293	6	**271**	513	249	491	227	469	"
470	206	448	184	**426**	139	404	117	382	95	360	73	338	51	316	29	294	7	**272**	514	250	492	228	"
229	471	207	**449**	162	427	140	405	118	383	96	361	74	339	52	317	30	295	8	**273**	515	251	493	"
494	230	**472**	185	450	163	428	141	406	119	384	97	362	75	340	53	318	31	296	9	**274**	516	252	"
253	**495**	208	473	186	451	164	429	142	407	120	385	98	363	76	341	54	319	32	297	10	**275**	517	"
518	231	496	209	474	187	452	165	430	143	408	121	386	99	364	77	342	55	320	33	298	11	**276**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	6095	6095

6095

Totalsumme aller Zahlen = 140185.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

23.

№ 58.

254	519	232	497	210	475	188	453	166	431	144	409	122	387	100	365	78	343	56	321	34	299	**12**	6095
519	**255**	497	233	475	211	453	189	431	167	409	145	387	123	365	101	343	79	321	57	299	**35**	277	6371
278	543	**256**	521	234	499	212	477	190	455	168	433	146	411	124	389	102	367	80	345	**58**	323	36	6647
543	279	521	**257**	499	235	477	213	455	191	433	169	411	147	389	125	367	103	345	**81**	323	59	301	6923
302	567	280	545	**258**	523	236	501	214	479	192	457	170	435	148	413	126	391	**104**	369	82	347	60	7199
567	303	545	281	523	**259**	501	237	479	215	457	193	435	171	413	149	391	**127**	369	105	347	83	325	7475
326	591	304	569	282	547	**260**	525	238	503	216	481	194	459	172	437	**150**	415	128	393	106	371	84	7751
591	327	569	305	547	283	525	**261**	503	239	481	217	459	195	437	**173**	415	151	393	129	371	107	349	8027
350	615	328	593	306	571	284	549	**262**	527	240	505	218	483	**196**	461	174	439	152	417	130	395	108	8303
615	351	593	329	571	307	549	285	527	**263**	505	241	483	**219**	461	197	439	175	417	153	395	131	373	8579
374	639	352	617	330	595	308	573	286	551	**264**	529	**242**	507	220	485	198	463	176	441	154	419	132	8855
639	375	617	353	595	331	573	309	551	287	529	**265**	507	243	485	221	463	199	441	177	419	155	397	9131
398	663	376	641	354	619	332	597	310	575	**288**	553	**266**	531	244	509	222	487	200	465	178	443	156	9407
663	399	641	377	619	355	597	333	575	**311**	553	289	531	**267**	509	245	487	223	465	201	443	179	421	9683
422	687	400	665	378	643	356	621	**334**	599	312	577	290	555	**268**	533	246	511	224	489	202	467	180	9959
687	423	665	401	643	379	621	**357**	599	335	577	313	555	291	533	**269**	511	247	489	225	467	203	445	10235
446	711	424	689	402	667	**380**	645	358	623	336	601	314	579	292	557	**270**	535	248	513	226	491	204	10511
711	447	689	425	667	**403**	645	381	623	359	601	337	579	315	557	293	535	**271**	513	249	491	227	469	10787
470	735	448	713	**426**	691	404	669	382	647	360	625	338	603	316	581	294	559	**272**	537	250	515	228	11063
735	471	713	**449**	691	427	669	405	647	383	625	361	603	339	581	317	559	295	537	**273**	515	251	493	11339
494	759	**472**	737	450	715	428	693	406	671	384	649	362	627	340	605	318	583	296	561	**274**	539	252	11615
759	**495**	737	473	715	451	693	429	671	407	649	385	627	363	605	341	583	319	561	297	539	**275**	517	11891
518	733	496	761	474	739	452	717	430	695	408	673	386	651	364	629	342	607	320	585	298	563	**276**	12167
11661	11937	11155	11431	10649	10925	10143	10419	9637	9913	9131	9407	8625	8901	8119	8395	7613	7889	7107	7383	6601	6877	6095	6095

6095

Totalsumme aller Zahlen — 210013.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

24.

№ 59.

24	554	574	4	20	558	570	8	16	562	566	12	13	563	567	9	17	559	571	5	21	555	575	**1**	6924
25	**47**	531	549	29	43	535	545	33	39	539	541	540	542	34	40	536	546	30	44	532	550	**26**	48	"
528	50	**70**	508	524	54	66	512	520	58	62	516	517	59	63	513	521	55	67	509	525	**51**	71	505	"
73	503	75	**93**	485	499	79	89	489	495	83	493	492	86	490	496	80	90	486	500	**76**	94	482	96	"
480	98	478	100	**116**	462	474	104	112	466	470	108	109	467	471	105	113	463	475	**101**	117	459	119	457	"
121	455	123	453	125	**139**	439	449	129	135	443	445	444	446	130	136	440	450	**126**	140	436	142	434	144	"
432	146	430	148	428	150	**162**	416	424	154	158	420	421	155	159	417	425	**151**	163	413	165	411	167	409	"
169	407	171	405	173	403	175	**185**	393	399	179	397	396	182	394	400	**176**	186	390	188	388	190	386	192	"
384	194	382	196	380	198	378	200	**208**	370	374	204	205	371	375	**201**	209	367	211	365	213	363	215	361	"
217	359	219	357	221	355	223	353	225	**231**	347	349	348	350	**226**	232	344	234	342	236	340	238	338	240	"
336	242	334	244	332	246	330	248	328	250	**254**	324	325	**251**	255	321	257	319	259	317	261	315	263	313	"
265	311	267	309	269	307	271	305	273	303	299	**277**	**276**	302	298	280	296	282	294	284	292	286	290	288	"
289	287	291	285	293	283	295	281	297	279	275	**301**	**300**	278	274	304	272	306	270	308	268	310	266	312	"
264	314	262	316	260	318	258	320	256	322	**326**	252	253	**323**	327	249	329	247	331	245	333	243	335	241	"
337	239	339	237	341	235	343	233	345	**351**	227	229	228	230	**346**	352	224	354	222	356	220	358	218	360	"
216	362	214	364	212	366	210	368	**376**	202	206	372	373	203	207	**369**	377	199	379	197	381	195	383	193	"
385	191	387	189	389	187	391	**401**	177	183	395	181	180	398	178	184	**392**	402	174	404	172	406	170	408	"
168	410	166	412	164	414	**426**	152	160	418	422	156	157	419	423	153	161	**415**	427	149	429	147	431	145	"
433	143	435	141	437	**451**	127	137	441	447	131	133	132	134	442	448	128	138	**438**	452	124	454	122	456	"
120	458	118	460	**476**	102	114	464	472	106	110	468	469	107	111	465	473	103	115	**461**	477	99	479	97	"
481	95	483	**501**	77	91	487	497	81	87	491	85	84	494	82	88	488	498	78	92	**484**	502	74	504	"
72	506	**526**	52	68	510	522	56	64	514	518	60	61	515	519	57	65	511	523	53	69	**507**	527	49	"
529	**551**	27	45	533	547	31	41	537	543	35	37	36	38	538	544	32	42	534	548	28	46	**530**	552	"
576	2	22	556	572	6	18	560	568	10	14	564	565	11	15	561	569	7	19	557	573	3	23	**553**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	6924	

6924 6924

Totalsumme aller Zahlen = 166176.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

24.

№ 60.

93	2213	2293	13	17	2229	2277	29	61	2245	2261	45	49	2249	2265	33	65	2233	2281	17	81	2217	2297	**1**	27624
97	**185**	2121	2193	113	169	2137	2177	129	153	2153	2161	2157	2165	133	157	2141	2181	117	173	2125	2197	**101**	189	„
2109	197	**277**	2029	2093	213	261	2045	2077	229	245	2061	2065	233	249	2049	2081	217	265	2033	2097	**201**	281	2017	„
289	2009	297	**369**	1937	1993	313	353	1953	1977	329	1969	1965	341	1957	1981	317	357	1941	1997	**301**	373	1925	381	„
1917	389	1909	397	**461**	1845	1893	413	445	1861	1877	429	433	1865	1881	417	449	1849	1897	**401**	465	1833	473	1825	„
481	1817	489	1809	497	**553**	1753	1793	513	537	1769	1777	1773	1781	517	541	1757	1707	**501**	557	1741	565	1733	373	„
1725	581	1717	589	1709	597	**645**	1661	1693	613	629	1677	1681	617	633	1665	1697	**601**	649	1649	657	1641	665	1633	„
673	1625	681	1617	689	1609	697	**737**	1869	1593	713	1585	1581	725	1573	1597	**701**	741	1557	749	1549	757	1641	765	„
1533	773	1525	781	1517	789	1509	797	**829**	1477	1493	813	817	1481	1497	**801**	833	1465	841	1457	849	1449	857	1441	„
865	1433	873	1425	881	1417	889	1409	897	**921**	1385	1393	1389	1397	**901**	925	1373	933	1365	941	1357	949	1349	957	„
1241	965	1233	973	1325	981	1317	989	1309	997	**1013**	1293	1279	**1001**	1017	1281	1025	1273	1033	1265	1041	1257	1049	1249	„
1057	1241	1065	1233	1073	1225	1081	1217	1089	1209	1193	**1105**	**1101**	1205	1189	1117	1181	1125	1173	1133	1165	1141	1157	1149	„
1153	1145	1161	1137	1169	1129	1177	1121	1185	1113	1097	**1201**	**1197**	1109	1093	1213	1085	1221	1077	1229	1069	1237	1061	1245	„
1053	1253	1045	1261	1037	1269	1029	1277	1021	1285	**1301**	1005	1009	**1289**	1305	993	1313	985	1321	977	1329	969	1337	961	„
957	953	1353	945	1361	937	1369	929	1377	**1401**	905	913	909	917	**1381**	1405	893	1413	885	1421	877	1429	869	1437	„
861	1445	853	1453	845	1461	837	1469	**1501**	805	821	1485	1489	809	825	**1473**	1505	793	1513	785	1521	777	1529	769	„
1537	761	1545	753	1553	745	1561	**1601**	705	729	1577	721	717	1589	709	733	**1565**	1605	663	1613	685	1621	677	1629	„
669	1637	661	1645	653	1653	**1701**	605	637	1669	1685	621	625	1873	1689	609	641	**1657**	1705	593	1713	585	1721	577	„
1729	569	1737	561	1745	**1801**	505	545	1761	1785	521	529	525	533	1705	1789	509	549	**1749**	1805	493	1813	485	1821	„
477	1829	469	1837	**1901**	405	453	1853	1885	421	437	1869	1873	425	441	1857	1889	409	457	**1841**	1905	393	1913	385	„
1921	377	1929	**2001**	305	361	1945	1985	321	345	1961	337	333	1973	325	349	1949	1989	309	365	**1933**	2005	293	2013	„
285	2021	**2101**	205	269	2037	2085	221	253	2053	2069	237	241	2057	2073	225	257	2041	2089	209	273	**2025**	2105	193	„
2113	**2201**	105	177	2129	2185	121	161	2145	2169	137	145	141	149	2149	2173	125	165	2133	2189	109	181	**2117**	2205	„
2301	5	85	2221	2285	21	69	2237	2269	37	53	2253	2257	41	57	2241	2273	25	73	2225	2289	9	89	**2209**	„
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	27624	

27624 27624

Totalsumme aller Zahlen = 662976.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

25.

№ 61.

301	614	277	590	253	566	229	542	205	518	181	494	157	470	133	446	109	422	85	398	61	374	37	350	**13**	7825
14	**302**	615	278	591	254	567	230	543	206	519	182	495	158	471	134	447	110	423	86	399	62	375	**38**	326	"
327	15	**303**	616	279	592	255	568	231	544	207	520	183	496	159	472	135	448	111	424	87	400	**63**	351	39	"
40	328	16	**304**	617	280	593	256	569	232	545	208	521	184	497	160	473	136	449	112	425	**88**	376	64	352	"
353	41	329	17	**305**	618	281	594	257	570	233	546	209	522	185	498	161	474	137	450	**113**	401	89	377	65	"
66	354	42	330	18	**306**	619	282	595	258	571	234	547	210	523	186	499	162	475	**138**	426	114	402	90	378	"
379	67	355	43	331	19	**307**	620	283	596	259	572	235	548	211	524	187	500	**163**	451	139	427	115	403	91	"
92	380	68	356	44	332	20	**308**	621	284	597	260	573	236	549	212	525	**188**	476	164	452	140	428	116	404	"
405	93	381	69	357	45	333	21	**309**	622	285	598	261	574	237	550	**213**	501	189	477	165	453	141	429	117	"
118	406	94	382	70	358	46	334	22	**310**	623	286	599	262	575	**238**	526	214	502	190	478	166	454	142	430	"
431	119	407	95	383	71	359	47	335	23	**311**	624	287	600	**263**	551	239	527	215	503	191	479	167	455	143	"
144	432	120	408	96	384	72	360	48	336	24	**312**	625	**288**	576	264	552	240	528	216	504	192	480	168	456	"
457	145	433	121	409	97	385	73	361	49	337	25	**313**	601	289	577	265	553	241	529	217	505	193	481	169	"
170	458	146	434	122	410	98	386	74	362	50	**338**	1	**314**	602	290	578	266	554	242	530	218	506	194	482	"
483	171	459	147	435	123	411	99	387	75	**363**	26	339	2	**315**	603	291	579	267	555	243	531	219	507	195	"
196	484	172	460	148	436	124	412	100	**388**	51	364	27	340	3	**316**	604	292	580	268	556	244	532	220	508	"
509	197	485	173	461	149	437	125	**413**	76	389	52	365	28	341	4	**317**	605	293	581	269	557	245	533	221	"
222	510	198	486	174	462	150	**438**	101	414	77	390	53	366	29	342	5	**318**	606	294	582	270	558	246	534	"
535	223	511	199	487	175	**463**	126	439	102	415	78	391	54	367	30	343	6	**319**	607	295	583	271	559	247	"
248	536	224	512	200	**488**	151	464	127	440	103	416	79	392	55	368	31	344	7	**320**	608	296	584	272	560	"
561	249	537	225	**513**	176	489	152	465	128	441	104	417	80	393	56	369	32	345	8	**321**	609	297	585	273	"
274	562	250	**538**	201	514	177	490	153	466	129	442	105	418	81	394	57	370	33	346	9	**322**	610	298	586	"
587	275	**563**	226	539	202	515	178	491	154	467	130	443	106	419	82	395	58	371	34	347	10	**323**	611	299	"
300	**588**	251	564	227	540	203	516	179	492	155	468	131	444	107	420	83	396	59	372	35	348	11	**324**	612	"
613	276	589	252	565	228	541	204	517	180	493	156	469	132	445	108	421	84	397	60	373	36	349	12	**325**	"
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	7825	

7825

7825

Totalsumme aller Zahlen = 195625.

Tafel XL.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

25.

№ 62.

301	614	277	590	253	566	229	542	205	518	181	494	157	470	133	446	109	422	85	398	61	374	37	350	13	7825
614	302	590	278	566	254	542	230	518	206	494	182	470	158	446	134	422	110	398	86	374	62	350	38	326	8150
327	640	308	616	279	592	255	568	231	544	207	520	183	496	159	472	135	448	111	424	87	400	63	376	39	8475
640	328	616	304	592	280	568	256	544	232	520	208	496	184	472	160	448	136	424	112	400	88	376	64	352	8800
353	666	329	642	305	618	281	594	257	570	233	546	209	522	185	498	161	474	137	450	113	426	89	402	65	9125
666	354	642	330	618	306	594	282	570	258	546	234	522	210	498	186	474	162	450	138	426	114	402	90	378	9450
379	692	355	668	331	644	307	620	283	596	259	572	235	548	211	524	187	500	163	476	139	452	115	428	91	9775
692	380	668	356	644	332	620	308	596	284	572	260	548	236	524	212	500	188	476	164	452	140	428	116	404	10100
405	718	381	694	357	670	333	646	309	622	285	598	261	574	237	550	213	526	189	502	165	478	141	454	117	10425
718	406	694	382	670	358	646	334	622	310	598	286	574	262	550	238	526	214	502	190	478	166	454	142	430	10750
431	744	407	720	383	696	359	672	335	648	311	624	287	600	263	576	239	552	215	528	191	504	167	480	143	11075
744	432	720	408	696	384	672	360	648	336	624	312	600	288	576	264	552	240	528	216	504	192	480	168	456	11400
457	770	433	746	409	722	385	698	361	674	337	650	313	626	289	602	265	578	241	554	217	530	193	506	169	11725
770	458	746	434	722	410	698	386	674	362	650	338	626	314	602	290	578	266	554	242	530	218	506	194	482	12050
483	796	459	772	435	748	411	724	387	700	363	676	339	652	315	628	291	604	267	580	243	556	219	532	195	12375
796	484	772	460	748	436	724	412	700	388	676	364	652	340	628	316	604	292	580	268	556	244	532	220	508	12700
509	822	485	798	461	774	437	750	413	726	389	702	365	678	341	654	317	630	293	606	269	582	245	558	221	13025
822	510	798	486	774	462	750	438	726	414	702	390	678	366	654	342	630	318	606	294	582	270	558	246	534	13350
535	848	511	824	487	800	463	776	439	752	415	728	391	704	367	680	343	656	319	632	295	608	271	584	247	13675
848	536	824	512	800	488	776	464	752	440	728	416	704	392	680	368	656	344	632	320	608	296	584	272	560	14000
561	874	537	850	513	826	489	802	465	778	441	754	417	730	393	706	369	682	345	658	321	634	297	610	273	14325
874	562	850	538	826	514	802	490	778	466	754	442	730	418	706	394	682	370	658	346	634	322	610	298	586	14650
587	900	563	876	539	852	515	828	491	804	467	780	443	756	419	732	395	708	371	684	347	660	323	636	299	14975
900	588	876	564	852	540	828	516	804	492	780	468	756	444	732	420	708	396	684	372	660	348	636	324	612	15300
613	926	589	902	565	878	541	854	517	830	493	806	469	782	445	758	421	734	397	710	373	686	349	662	325	15625
15025	15350	14425	14750	13825	14150	13225	13550	12625	12950	12025	12350	11425	11750	10825	11150	10225	10550	9625	9950	9025	9350	8425	8750	7825	

7825 7825

Totalsumme aller Zahlen = 293125.

Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

26.

№ 63.

26	652	24	654	22	656	20	658	18	660	16	662	663	14	665	11	667	9	669	7	671	5	673	3	675	**1**	8801
27	**51**	627	49	629	47	631	45	633	43	635	41	638	637	38	640	36	642	34	644	32	646	30	648	**28**	650	„
624	54	**76**	602	74	604	72	606	70	608	68	610	611	66	613	63	615	61	617	59	619	57	621	**55**	77	599	„
79	597	81	**101**	577	99	579	97	581	95	583	93	586	585	90	588	88	590	86	592	84	594	**82**	596	574	104	„
572	106	570	108	**126**	552	124	554	122	556	120	558	559	118	561	115	563	113	565	111	567	**109**	127	549	129	547	„
131	545	133	543	135	**151**	527	149	529	147	531	145	534	533	142	536	140	538	138	540	**136**	542	524	154	522	156	„
520	158	518	160	516	162	**176**	502	174	504	172	506	507	170	509	167	511	165	513	**163**	177	499	179	497	181	495	„
183	493	185	491	187	489	189	**201**	477	199	479	197	482	481	194	484	192	486	**190**	488	474	204	472	206	470	208	„
468	210	466	212	464	214	462	216	**226**	452	224	454	455	222	457	219	459	**217**	227	449	229	447	231	445	233	443	„
235	441	237	439	239	437	241	435	243	**251**	427	249	430	429	246	432	**244**	434	424	254	422	256	420	258	418	260	„
416	262	414	264	412	266	410	268	408	270	**276**	402	273	404	405	**271**	277	399	279	397	281	395	283	393	285	391	„
287	389	289	387	291	385	293	383	295	381	297	**301**	377	378	**298**	380	374	304	372	306	370	308	368	310	366	312	„
364	314	362	316	360	318	358	320	356	322	354	324	**326**	**325**	353	349	329	347	331	345	333	343	335	341	337	339	„
313	363	315	361	317	359	319	357	321	355	323	350	**352**	**351**	327	328	348	330	346	332	344	334	342	336	340	338	„
390	288	388	290	386	292	384	294	382	296	375	**379**	300	299	**376**	302	303	373	305	371	307	369	309	367	311	365	„
261	415	263	413	265	411	267	409	269	400	**406**	275	403	274	272	**401**	407	278	398	280	396	282	394	284	392	286	„
442	236	440	238	438	240	436	242	425	**433**	250	428	248	247	431	245	**426**	252	253	423	255	421	257	419	259	417	„
209	467	211	465	213	463	215	450	**460**	225	453	223	221	456	220	458	218	**451**	461	228	448	230	446	232	444	234	„
494	184	492	186	490	188	476	**487**	200	478	198	480	196	195	483	193	485	191	**476**	202	203	473	205	471	207	469	„
157	519	159	517	161	500	**514**	175	503	173	505	171	169	508	168	510	166	512	164	**501**	515	178	498	180	496	182	„
546	132	544	134	525	**541**	150	528	148	530	146	532	144	143	535	141	537	139	539	137	**526**	152	153	523	155	521	„
105	571	107	550	**568**	125	553	123	555	121	557	119	117	560	116	562	114	564	112	566	110	**551**	569	128	548	130	„
598	80	575	**595**	100	578	98	580	96	582	94	584	92	91	587	89	589	87	591	85	593	83	**576**	102	103	573	„
53	600	**622**	75	603	73	605	71	607	69	609	67	65	612	64	614	62	616	60	618	58	620	56	**601**	623	78	„
625	**649**	50	628	48	630	46	632	44	634	42	636	40	39	639	37	641	35	643	33	645	31	647	29	**626**	52	„
676	25	653	23	655	21	657	19	659	17	661	15	13	664	12	666	10	668	8	670	6	672	4	674	2	**651**	„

8801 „ 8801 8801

Totalsumme aller Zahlen — 228826.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

26.

№ 64.

101	2605	93	2613	85	2621	77	2629	69	2637	61	2645	2649	53	2657	41	2665	33	2673	25	2681	17	2689	9	2697	1	35126
105	201	2505	193	2513	185	2521	177	2529	169	2537	161	2549	2545	149	2557	141	2565	133	2573	125	2581	117	2589	109	2597	„
2493	213	301	2405	293	2413	285	2421	277	2429	269	2437	2441	261	2449	249	2457	241	2465	233	2473	225	2481	217	305	2393	„
313	2385	321	401	2305	393	2313	386	2321	377	2329	369	2341	2337	357	2349	349	2357	341	2363	333	2373	325	2381	2293	413	„
2285	421	2277	429	501	2205	493	2213	485	2221	477	2229	2233	469	2241	457	2249	449	2257	441	2266	433	505	2193	513	2185	„
521	2177	529	2169	537	601	2105	593	2113	585	2121	577	2133	2129	565	2141	557	2149	549	2157	541	2166	2093	613	2085	621	„
2077	629	2069	637	2061	645	701	2005	693	2013	685	2021	2025	677	2033	665	2041	657	2049	649	705	1993	713	1985	721	1977	„
729	1969	737	1961	745	1953	753	801	1905	793	1913	785	1925	1921	773	1933	765	1941	757	1949	1893	813	1885	821	1877	829	„
1869	837	1861	845	1853	853	1845	861	901	1805	893	1813	1817	885	1825	873	1833	865	905	1793	913	1786	921	1777	929	1769	„
937	1761	945	1753	953	1745	961	1737	969	1001	1705	993	1717	1713	981	1725	973	1733	1693	1013	1685	1021	1677	1029	1669	1037	„
1661	1045	1653	1053	1645	1061	1637	1069	1629	1077	1101	1605	1089	1613	1617	1081	1105	1593	1113	1585	1121	1577	1129	1569	1137	1561	„
1145	1553	1153	1545	1161	1537	1169	1529	1177	1521	1185	1201	1505	1509	1189	1517	1493	1213	1485	1221	1477	1229	1469	1237	1461	1245	„
1453	1253	1445	1261	1437	1269	1429	1277	1421	1285	1413	1293	1301	1297	1409	1393	1313	1385	1321	1377	1329	1369	1337	1361	1345	1335	„
1249	1449	1257	1441	1265	1433	1273	1425	1281	1417	1289	1397	1405	1401	1305	1309	1389	1317	1381	1325	1373	1333	1365	1341	1357	1349	„
1157	1149	1549	1157	1541	1165	1533	1173	1525	1181	1497	1513	1197	1193	1501	1205	1209	1489	1217	1481	1225	1473	1233	1465	1241	1457	„
1041	1657	1049	1649	1057	1641	1065	1633	1073	1597	1621	1097	1609	1093	1085	1601	1625	1109	1589	1117	1581	1125	1573	1133	1565	1141	„
1765	941	1757	949	1749	957	1741	965	1697	1729	997	1709	989	985	1721	977	1701	1005	1009	1689	1017	1681	1025	1673	1033	1665	„
833	1865	841	1857	849	1849	857	1797	1837	897	1809	889	881	1821	877	1829	869	1801	1841	909	1789	917	1781	925	1773	933	„
1973	733	1965	741	1957	749	1897	1945	797	1909	789	1917	781	777	1929	769	1937	761	1901	805	809	1889	817	1881	825	1873	„
625	2073	633	2065	641	1997	2053	697	2009	689	2017	681	673	2029	669	2037	661	2045	653	2001	2057	709	1989	717	1981	725	„
2181	525	2173	533	2097	2161	597	2109	589	2117	581	2125	573	569	2137	561	2145	553	2153	545	2101	605	609	2089	617	2081	„
417	2281	425	2197	2269	497	2209	489	2217	481	2225	473	465	2237	461	2245	453	2253	445	2261	437	2201	2273	509	2189	517	„
2389	317	2297	2377	397	2309	389	2317	381	2325	373	2333	365	361	2345	353	2353	345	2361	337	2369	329	2301	405	409	2289	„
209	2397	2485	297	2409	289	2417	281	2425	273	2433	265	257	2445	253	2453	245	2461	237	2469	229	2477	221	2401	2489	309	„
2497	2593	197	2509	189	2517	181	2525	173	2533	165	2541	157	153	2553	145	2561	137	2569	129	2577	121	2585	113	2501	205	„
2701	97	2609	89	2617	81	2625	73	2633	65	2641	57	49	2653	45	2661	37	2669	29	2677	21	2685	13	2693	5	2601	
„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	35126	

35126 35126

Totalsumme aller Zahlen = 913276.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

7.

Die Potenzreihe aus der Wurzelgrösse 3 eingetragen.

№ 65

22 31,381,059.609	47 26,588,814,358,957,503,287.787	16 43,046.721	41 36,472,996,377,170,786.403	10 59.049	35 50,031,545,098,999.707	4 81
5 243	23 94,143,178.827	48 79,766,443,076,872,509,863.361	17 129,140.163	42 109,418,989,131,512,359.209	11 177.147	29 68,630,377,364.883
30 205,891,132,094.649	6 729	24 282,429,536.481	49 239,299,329,230,617,529,590.083	18 387,420.489	36 150,094,635,296,999.121	12 531.441
13 1,594.323	31 617,673,396,283.947	7 2.187	25 847,288,609.443	43 328,256,967,394,537,077,627	19 1,162,261.467	37 450,283,905,890,997,363
38 1,350,851,717,672,992.089	14 4,782.969	32 1,853,020,188,831.841	1 3	26 2,541,865,828.329	44 984,770,902,183,611,232.881	20 3,486,784.401
21 10,460,353.203	39 4,052,555,153,018,976.267	8 6.561	33 5,559,060,566,555.523	2 9	27 7,625,597,484.987	45 2,954,312,706,550,833,698.643
46 8,862,938,119,652,501,095.929	15 14,348.907	40 12,157,665,459,056,928.801	9 19.683	34 16,677,181,699,666.569	3 27	28 22,876,792,454.961

Das Product einer Reihe $= 3^{175}$.

Das Product aller Zahlen des Tetragrammes $= 3^{825}$.

Modificirtes Tetragramm

aus dem

Quadrate der Zahl

9.

Die Potenzenreihe aus der Wurzel 3 eingetragen.

№ 66.

37 450,283.905, 890,997.363	78 16,423,203, 268,260,658, 146,231,467, 800,709,255. 289	29 68,630,377, 364.883	70 2,503,155,504, 993,241,601, 315,571,886, 085.849	21 10,460,353. 203	62 381,520,424, 476,945,831, 628,649,898. 809	13 1,594.323	54 58,149,737, 003,040,059, 690,390.169	5 243
6 729	38 1,350,851,717, 672,992,089	79 49,269,609, 804,781,974, 438,694,403, 402,127,765. 867	30 205,891,132, 094.649	71 7,509,466,514, 979,724,803, 946,715,958, 257,547	22 31,381.059. 609	63 1,144,561,273, 430,837,494, 885,949,696, 427	14 4,782.969	46 8,862,938,119, 652,501,095, 929
47 26,588,814, 358,957,503, 287.787	7 2187	39 4,052,555, 153,018, 976,267	80 147,808,829, 414,345,923, 316,083,210, 206,383,297. 601	31 617,673,396, 283.947	72 22,528,399,544, 939,174,411, 840,147,874, 722.641	23 94,143,178. 827	55 174,449,211, 009,120,179, 071,170,507	15 14,348.907
16 43,046.721	48 79,766,443, 076,872,509, 863.361	8 6,561	40 12,157,665, 459,056, 928.801	81 443,426,488, 243,037,769, 948,249,630, 619,149,892, 803	32 1,853,020,188, 851.841	64 3,433,683,820, 292,512,484, 657,849,089, 281	24 282,429, 536.481	56 523,347,633, 027,360,537, 213,511.521
57 1,570,042,899, 082,081,611, 640,534,563	17 129,140,163	49 239,299,329, 230,617,529, 590.083	9 19.683	41 36,472,996, 377,170, 786.403	73 67,585,198,634, 817,523,235, 520,443,624, 317.923	33 5,559,060, 566,555. 523	65 10,301,051, 460,877,537, 453,973,547, 267,843	25 847,288, 609.443
26 2,541,863,828. 329	58 4,710,128,697, 246,244,834, 921,603,689	18 387,420.489	50 717,897,987, 691,852,288, 770.249	1 3	42 109,418,989, 131,512,359. 209	74 202,755,595, 904,452,569, 706,561,330, 872,953.769	34 16,677,181, 699,666.569	66 30,903,154,382, 632,612,361, 920,641,803, 529
67 92,709,463, 147,897,837, 085,761,925, 410.587	27 7,625,597, 484.987	59 14,130,386,091, 738,734,504, 764,811,067	10 59.049	51 2,153,693,963, 075,557,766, 310.747	2 9	43 328,256,967, 394,537,077. 627	75 608,266,787, 713,357,709, 119,683,992, 618,861.307	35 50.031,545, 098,999.707
36 150,094,635, 296,999.121	68 278,128,389,443, 693,511,257,285, 776,231.761	19 1,162,261. 467	60 42,391,158,275, 216,203,514, 294,433.201	11 177.147	52 6,461,081,889, 226,673,298, 932.241	3 27	44 984,770,902, 183,611,232. 881	76 1,824,800,363, 140,073,127, 359,051,977, 856,583.921
77 5,474,401,089, 420,219,382, 077,155,933, 569,751.763	28 21,876,792, 454.961	69 834,385,168, 331,080,533, 771,857,328, 695.283	20 3,486,784. 401	61 127,173,474,825, 648,610,542, 883,299.603	12 531.441	53 19,383,245, 667,680,019, 896,796.723	4 81	45 2,954,312, 706,550,833, 698.643

Das Product einer Reihe = 3^{369}.

Das Product aller Zahlen des Tetragrammes = 3^{3321}.

Modificirtes Tetragramm aus dem Quadrate der Zahl 11.

Die Potenzreihe aus der Wurzel 3 eingetragen.

№ 67.

56 523,347,633,027,360,537,213,511,521	117 66,555,937,033,867,822,607,895,549,241,096,482,953,017,615,834,735,226,163	46 8,862,938,119,652,501,095,929	107 1,127,130,637,840,908,780,976,740,490,797,413,723,399,509,150,616,187	36 150,094,635,296,999,121	97 19,088,056,323,407,827,075,424,486,287,615,602,692,670,648.963	26 2,541,865,828.329	87 323,257,909,929,174,534,292,273,980,721,360,271,853,387	16 43,046,721	77 5,474,401,089,420,219,382,077,155,933,569,751,763	6 729
7 2.187	57 1,570,042,899,082,081,611,640,534.563	118 199,667,811,101,603,467,823,686,647,723,289,448,859,052,847,504,205,678.489	47 26,588,814,358,957,503,287.787	108 3,381,391,913,522,726,342,930,221,472,392,241,170,198,527,451,848,561	37 450,283,905,890,997.363	98 57,264,168,970,223,481,226,273,458,862,846,808,078,011,946.889	27 7,625,597,484.987	88 969,773,729,787,523,602,876,821,942,164,080,815,560.161	17 129,140.163	67 92,709,463,147,897,837,085,761,925,410.587
68 287,128,398,443,693,511,257,285,776,231,761	8 6.561	58 4,710,128,697,246,244,834,921,603,689	119 599,003,433,304,810,403,471,059,943,169,868,346,577,158,542,512,617,035,467	48 79,766,443,076,872,509,863,361	109 10,144,175,740,568,179,028,790,664,417,176,723,510,595,582,355,545.683	38 1,350,851,717,672,992,089	99 171,792,506,910,670,443,678,820,376,588,540,424,234,035,840.667	28 22,876,792,454.961	78 16,423,203,268,260,658,146,231,467,800,709,255.289	18 387,420.489
19 1,162,261,467	69 834,385,168,331,080,533,771,857,328,695.283	9 19.683	59 14,130,386,091,738,734,504,764,811.067	120 1,797,010,299,914,431,210,413,179,829,509,605,039,731,475,627,537,851,106.401	49 239,299,329,230,617,529,590,083	110 30,432,527,221,704,537,086,371,993,251,530,170,531,786,747,066,637,049	39 4,052,555,153,018,976.267	89 2,909,321,189,362,570,808,630,465,826,492,242,446,680,483	29 68,630,377,364.883	79 49,269,609,804,781,974,438,694,403,402,127,765,867
80 147,808,829,414,345,923,316,083,210,206,383,297,601	20 3,486,784,401	70 2,503,155,504,993,241,601,315,571,986,085,849	10 59.049	60 42,391,158,275,216,203,514,294,433,201	121 5,391,030,899,743,293,631,239,539,488,528,815,119,194,426,882,613,553,319,203	50 717,897,987,691,852,588,770.249	100 515,377,520,732,011,331,036,461,129,765,621,272,702,107,522.001	40 12,157,665,459,056,928,801	90 8,727,963,568,087,712,425,891,397,479,476,727,340,041.449	30 205,891,132,094,649
31 617,673,396,283.947	81 443,426,488,243,037,769,948,249,630,619,149,892.803	21 10,460,353,203	71 7,509,466,514,979,724,803,946,715,958,257.547	11 177.147	61 127,173,474,825,648,610,542,883,299,603	111 91,297,581,665,113,611,259,115,979,754,590,511,595,360,241,199,911.147	51 2,153,693,963,075,557,766,310.747	101 1,546,132,562,196,033,993,109,383,389,296,863,818,106,322,566,003	41 36,472,996,377,170,786,403	91 26,183,890,704,263,137,277,674,192,438,430,182,020,124.347
92 78,551,672,112,789,411,833,022,577,315,290,546,060,373.041	32 1,853,020,188,851.841	82 1,330,279,464,729,113,309,844,748,891,857,449,678.409	22 31,381,059.609	72 22,528,399,544,939,174,411,840,147,874,772.641	1 3	62 381,520,424,476,945,831,628,649,898,809	112 273,892,744,995,340,833,777,347,939,263,771,534,786,080,723,599,733,441	52 6,461,081,889,226,673,298,932,241	102 4,638,397,686,588,101,979,328,150,167,890,591,454,318,967,698,009	42 109,418,989,131,512,359,209
43 328,256,967,394,537,077,627	93 235,655,016,338,368,235,499,067,731,945,871,638,181,119.123	33 5,559,060,566,555,523	83 3,990,838,394,187,339,929,534,246,676,572,349,035,227	12 531.441	73 67,585,198,634,817,523,235,520,443,624,317.923	2 9	63 1,144,561,273,430,837,494,885,949,696.427	113 821,678,234,986,022,501,332,043,817,791,314,604,358,242,170,799,200,323	53 19,383,245,667,680,019,896,796.723	103 13,915,193,059,764,305,937,984,450,503,671,774,362,956,903,094.027
104 41,745,579,179,292,917,813,953,351,511,015,323,088,870,709,282,081	44 984,770,902,183,611,232,881	94 706,965,049,015,104,706,497,203,195,837,614,914,543,357.369	23 94,143,178,827	84 11,972,515,182,562,019,788,602,740,026,717,047,105,681	13 1,594,323	74 202,755,595,904,452,569,706,561,330,872,953,769	3 27	64 3,433,683,820,292,512,484,657,849,089,281	114 2,465,034,704,958,067,503,996,131,453,373,943,813,074,726,512,397,600,969	54 58,149,737,003,040,059,690,390.169
55 174,449,211,009,120,179,071,170.507	105 125,236,737,537,878,753,441,860,054,533,045,969,266,612,127,846,243	34 16,677,181,699,666.569	95 2,120,895,147,045,314,119,491,609,587,512,844,743,630,072.107	24 282,429,536.481	85 35,917,545,547,686,059,365,808,220,080,151,141,317.043	14 4,782.969	75 608,266,787,713,357,709,119,683,992,618,861,307	4 81	65 10,301,051,460,877,537,453,973,547,267,843	115 7,395,104,114,874,202,511,988,394,360,121,831,439,224,179,537,192,802.907
116 22,185,312,344,622,607,535,965,183,080,365,494,317,872,538,611,578,408,721	45 2,954,312,706,550,833,698,643	106 375,710,212,613,636,260,325,580,163,599,137,907,799,836,383,538.729	35 50,031,545,098,999.707	96 6,362,685,441,135,942,358,474,828,762,538,534,230,890,216.321	25 847,288,609.443	86 107,752,636,643,058,178,097,424,660,240,453,423,951,129	15 14,348,907	76 1,824,800,363,140,073,127,359,051,977,856,583,921	5 243	66 30,903,154,382,632,612,361,920,641,803,529

Das Product einer Reihe = 3^{671}.

Das Product aller Zahlen = 3^{7381}.

Arithmetischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme

aus den

ungeraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 68.

Die Wurzelgröße	Das Quadrat W^2			Linke obere Eckzahl $\frac{W^2-(W-2)}{2}$			Rechte obere Eckzahl	Linke untere Eckzahl $\frac{W^2+(W-1)W+1}{2}$			Rechte untere Eckzahl $\frac{W^2+W}{2}$			Die Zahl der gleichen Summen $\frac{W^3+W}{2}$			
3	9			4			2	8			6			15			
5	25	16		11	7		3	23	15		15	9		65	50		
7	49	24	8	22	11	4	4	46	23	8	28	13	4	175	110	60	
9	81	32	„	37	15	„	5	77	31	„	45	17	„	369	194	84	24
11	121	40	„	56	19	„	6	116	39	„	66	21	„	671	302	108	„
13	169	48	„	79	23	„	7	163	47	„	91	25	„	1105	434	132	„
15	225	56	„	106	27	„	8	218	55	„	120	29	„	1695	590	156	„
17	289	64	„	137	31	„	9	281	63	„	153	33	„	2465	770	180	„
19	361	72	„	172	35	„	10	352	71	„	190	37	„	3439	974	204	„
21	441	80	„	211	39	„	11	431	79	„	231	41	„	4641	1202	228	„
23	529	88	„	254	43	„	12	518	87	„	276	45	„	6095	1454	276	„
25	625	96	„	301	47	„	13	613	95	„	325	49	„	7825	1730	300	„

Die Wurzelgröße	Differenz der horizontalen Reihen	Differenz der vertikalen Reihen	Differenz der Summen der wagrecht. Reihen der modif. Tetragram.	Differenz von links oben nach rechts unten	Differenz von rechts oben nach links unten W	Die Zahl im Mittelpunkte des Tetragrammes $\frac{W^2+1}{2}$			Die Zahl neben der recht. oberen Eckzahl			Die Zahl unterhalb der rechten oberen Eckzahl			Die Zahl neben der rechten unteren Eckzahl	Die Zahl oberhalb der linken untern Eckzahl $\frac{W(W-1)}{2}$			Die Totalsumme aller Zahlen eines Tetragrammes. $\frac{W^4+W^2}{2}$				
3	2	4		1	3	5			9			7			1	3			45				
5	4	6	15	1	5	13	8		20	11		16	9		2	10	7		325	280			
7	6	8	28	1	7	25	12	4	35	15	4	29	13	4	3	21	11	4	1225	900	620		
9	8	10	45	1	9	41	16	„	54	19	„	46	17	„	4	36	15	„	3321	2096	1196	576	
11	10	12	66	1	11	61	20	„	77	23	„	67	21	„	5	55	19	„	7381	4060	1964	768	192
13	12	14	91	1	13	85	24	„	104	27	„	92	25	„	6	78	23	„	14365	6984	2924	960	„
15	14	16	120	1	15	113	28	„	135	31	„	121	29	„	7	105	27	„	25425	11060	4076	1152	„
17	16	18	153	1	17	145	32	„	170	35	„	154	33	„	8	136	31	„	41905	16480	5420	1344	„
19	18	20	190	1	19	181	36	„	209	39	„	191	37	„	9	171	35	„	65341	23436	6956	1536	„
21	20	22	231	1	21	221	40	„	252	43	„	232	41	„	10	210	39	„	97461	32120	8684	1728	„
23	22	24	276	1	23	265	44	„	299	47	„	277	45	„	11	253	43	„	140185	42724	10604	1920	„
25	24	26	325	1	25	313	48	„	350	51	„	326	49	„	12	300	47	„	195625	55440	12716	2112	„

Aus den geraden Wurzelgrössen.

№ 69.

Die Wurzelgröße	Das Quadrat oder die linke untere Eckzahl W^2			Linke obere Eckzahl $\frac{W^2-(W-1)W}{2}+\frac{W}{2}=W$	Rechte obere Eckzahl	Linke untere Eckzahl W^2			Rechte untere Eckzahl $\frac{W^2+(W-1)W}{2}-\frac{(W-2)}{2}$			Die gleiche Summe $\frac{W^3+W}{2}$			
4	16			4	1	16			13			34			
6	36	20		6	1	36	20		31	18		111	77		
8	64	28	8	8	1	64	28	8	57	26	8	260	149	72	
10	100	36	„	10	1	100	36	„	91	34	„	505	245	96	24
12	144	44	„	12	1	144	44	„	133	42	„	870	365	120	„
14	196	52	„	14	1	196	52	„	183	50	„	1379	509	144	„
16	256	60	„	16	1	256	60	„	241	58	„	2056	677	168	„
18	324	68	„	18	1	324	68	„	307	66	„	2925	869	192	„
20	400	76	„	20	1	400	76	„	381	74	„	4010	1085	216	„
22	484	84	„	22	1	484	84	„	463	82	„	5335	1325	240	„
24	576	92	„	24	1	576	92	„	553	90	„	6924	1589	264	„
26	676	100	„	26	1	676	100	„	651	98	„	8801	1877	288	„

Die Wurzelgröße	Rechte obere Zahl der Mitte $\frac{W^2-W}{2}$			Rechte untere Zahl der Mitte $\frac{W^2+W}{2}$			Differenz der Reihe von links oben nach rechts und unten W−1	Differenz der Reihe von rechts oben nach links und unten W+1	Die Totalsumme aller im Tetragramme vorhandenen Zahlen. $\frac{W^4+W^2}{2}$				
4	6			10			3	5	136				
6	15	9		21	11		5	7	666	530			
8	28	13	4	36	15	4	7	9	2080	1414	884		
10	45	17	„	55	19	„	9	11	5050	2970	1556	672	
12	66	21	„	78	23	„	11	13	10440	5390	2420	864	192
14	91	25	„	105	27	„	13	15	19306	8866	3476	1056	„
16	120	29	„	136	31	„	15	17	32896	13590	4724	1248	„
18	153	33	„	171	35	„	17	19	52650	19754	6164	1440	„
20	190	37	„	210	39	„	19	21	80200	27550	7796	1632	„
22	231	41	„	253	43	„	21	23	117370	37170	9620	1824	„
24	276	45	„	300	47	„	23	25	166176	48806	11636	2016	„
26	325	49	„	351	51	„	25	27	228826	62650	13844	2208	„

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme

aus den

ungeraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 70.

$\frac{w^2-(w-2)}{2}$	$w^2-\frac{(w-3)}{2}$	$\frac{w^2-(3w-4)}{2}$	$w(w-1)-\frac{(w-5)}{2}$	$\frac{w^2-(5w-6)}{2}$	$w(w-2)-\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2-(7w-8)}{2}$	$w(w-3)-\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2-(9w-10)}{2}$	$w(w-4)-\frac{(w-11)}{2}$	$\frac{w^2-(11w-12)}{2}$	$w^2-\frac{(w-11)}{2}w-4$	$\frac{w^2-[(w-9)w+7]}{2}$	$w^2-\frac{(w-9)}{2}w-3$	$\frac{w^2-[(w-7)w+5]}{2}$	$w^2-\frac{(w-7)}{2}w-2$	$\frac{w^2-[(w-5)w+3]}{2}$	$w^2-\frac{(w-5)}{2}w-1$	$\frac{w^2-[(w-3)w+1]}{2}$	$w^2-\frac{(w-3)}{2}w$	$\frac{w^2-[(w-1)w-1]}{2}$
$w-\frac{(w-3)}{2}$	$\frac{w^2-(w-4)}{2}$	$w^2-\frac{(w-5)}{2}$	$\frac{w^2-(3w-6)}{2}$	$w(w-1)-\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2-(5w-8)}{2}$	$w(w-2)-\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2-(7w-10)}{2}$	$w(w-3)-\frac{(w-11)}{2}$	$\frac{w^2-(9w-12)}{2}$	$w(w-4)-\frac{(w-13)}{2}$	$\frac{w^2-[(w-11)w+7]}{2}$	$w^2-\frac{(w-11)}{2}w-3$	$\frac{w^2-[(w-9)w+5]}{2}$	$w^2-\frac{(w-9)}{2}w-2$	$\frac{w^2-[(w-7)w+3]}{2}$	$w^2-\frac{(w-7)}{2}w-1$	$\frac{w^2-[(w-5)w+1]}{2}$	$w^2-\frac{(w-5)}{2}w$	$\frac{w^2-[(w-3)w-1]}{2}$	$w^2-\frac{(w-1)}{2}w+1$
$\frac{w^2+2w-(w-4)}{2}$	$w-\frac{(w-5)}{2}$	$\frac{w^2-(w-6)}{2}$	$w^2-\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2-(3w-8)}{2}$	$w(w-1)-\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2-(5w-10)}{2}$	$w(w-2)-\frac{(w-11)}{2}$	$\frac{w^2-(7w-12)}{2}$	$w(w-3)-\frac{(w-13)}{2}$	$\frac{w^2-(9w-14)}{2}$	$w^2-\frac{(w-13)}{2}w-3$	$\frac{w^2-[(w-11)w+5]}{2}$	$w^2-\frac{(w-11)}{2}w-2$	$\frac{w^2-[(w-9)w+3]}{2}$	$w^2-\frac{(w-9)}{2}w-1$	$\frac{w^2-[(w-7)w+1]}{2}$	$w^2-\frac{(w-7)}{2}w$	$\frac{w^2-[(w-5)w-1]}{2}$	$w^2-\frac{(w-3)}{2}w+1$	$\frac{w^2-[(w-3)w-3]}{2}$
$2w-\frac{(w-5)}{2}$	$\frac{w^2+2w-(w-6)}{2}$	$w-\frac{(w-7)}{2}$																$w^2-\frac{(w-5)}{2}w+1$	$\frac{w^2-[(w-5)w-3]}{2}$	$w^2-\frac{(w-3)}{2}w+2$
$\frac{w^2+4w-(w-6)}{2}$	$2w-\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2+2w-(w-8)}{2}$																$\frac{w^2-[(w-7)w-3]}{2}$	$w^2-\frac{(w-5)}{2}w+2$	$\frac{w^2-[(w-5)w-5]}{2}$
$3w-\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2+4w-(w-8)}{2}$	$2w-\frac{(w-9)}{2}$			$\frac{w^2-9}{2}$	w^2-4	$\frac{w^2-(2w+7)}{2}$	$w(w-1)-3$	$\frac{w^2-(4w+5)}{2}$	$w(w-2)-2$	$\frac{w^2-(6w+3)}{2}$	$w(w-3)-1$	$\frac{w^2-(8w+1)}{2}$	w^2-4w	$\frac{w^2-(10w-1)}{2}$			$w^2-\frac{(w-7)}{2}w+2$	$\frac{w^2-[(w-7)w-5]}{2}$	$w^2-\frac{(w-5)}{2}w+3$
$\frac{w^2+6w-(w-8)}{2}$	$3w-\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2+4w-(w-10)}{2}$			$w-4$	$\frac{w^2-7}{2}$	w^2-3	$\frac{w^2-(2w+5)}{2}$	$w(w-1)-2$	$\frac{w^2-(4w+3)}{2}$	$w(w-2)-1$	$\frac{w^2-(6w+1)}{2}$	w^2-3w	$\frac{w^2-(8w-1)}{2}$	$w(w-5)+1$			$\frac{w^2-[(w-9)w-5]}{2}$	$w^2-\frac{(w-7)}{2}w+3$	$\frac{w^2-[(w-7)w-7]}{2}$
$4w-\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2+6w-(w-10)}{2}$	$3w-\frac{(w-11)}{2}$			$\frac{w^2+(2w-7)}{2}$	$w-3$	$\frac{w^2-5}{2}$	w^2-2	$\frac{w^2-(2w+3)}{2}$	$w(w-1)-1$	$\frac{w^2-(4w+1)}{2}$	w^2-2w	$\frac{w^2-(6w-1)}{2}$	$w(w-4)+1$	$\frac{w^2-(8w-3)}{2}$			$w^2-\frac{(w-9)}{2}w+3$	$\frac{w^2-[(w-9)w-7]}{2}$	$w^2-\frac{(w-7)}{2}w+4$
$\frac{w^2+8w-(w-10)}{2}$	$4w-\frac{(w-11)}{2}$	$\frac{w^2+6w-(w-12)}{2}$			$2w-3$	$\frac{w^2+(2w-5)}{2}$	$w-2$	$\frac{w^2-3}{2}$	w^2-1	$\frac{w^2-(2w+1)}{2}$	w^2-w	$\frac{w^2-(4w-1)}{2}$	$w(w-3)+1$	$\frac{w^2-(6w-3)}{2}$	$w(w-4)+2$			$\frac{w^2-[(w-11)w-7]}{2}$	$w^2-\frac{(w-9)}{2}w+4$	$\frac{w^2-[(w-9)w-9]}{2}$
$5w-\frac{(w-11)}{2}$	$\frac{w^2+8w-(w-12)}{2}$	$4w-\frac{(w-13)}{2}$			$\frac{w^2+(4w-5)}{2}$	$2w-2$	$\frac{w^2+(2w-3)}{2}$	$w-1$	$\frac{w^2-1}{2}$	w^2	$\frac{w^2-(2w-1)}{2}$	$w(w-2)+1$	$\frac{w^2-(4w-3)}{2}$	$w(w-3)+2$	$\frac{w^2-(6w-5)}{2}$			$w^2-\frac{(w-11)}{2}w+4$	$\frac{w^2-[(w-11)w-9]}{2}$	$w^2-\frac{(w-9)}{2}w+5$
$\frac{w^2+10w-(w-12)}{2}$	$5w-\frac{(w-13)}{2}$	$\frac{w^2+(w-13)w-7}{2}$			$3w-2$	$\frac{w^2+(4w-3)}{2}$	$2w-1$	$\frac{w^2+(2w-1)}{2}$	w	$\frac{w^2+1}{2}$	$w(w-1)+1$	$\frac{w^2-(2w-3)}{2}$	$w(w-2)+2$	$\frac{w^2-(4w-5)}{2}$	$w(w-3)+3$			$\frac{w^2-[(w-13)w-9]}{2}$	$w^2-\frac{(w-11)}{2}w+5$	$\frac{w^2-[(w-11)w-11]}{2}$
$w\frac{(w-9)}{2}-4$	$\frac{w^2+(w-11)w-7}{2}$	$w\frac{(w-11)}{2}-3$			$\frac{w^2+(6w-3)}{2}$	$3w-1$	$\frac{w^2+(4w-1)}{2}$	$2w$	$\frac{w^2+(2w+1)}{2}$	1	$\frac{w^2+3}{2}$	$w(w-1)+2$	$\frac{w^2-(2w-5)}{2}$	$w(w-2)+3$	$\frac{w^2-(4w-7)}{2}$			$w(w-4)+\frac{(w-11)}{2}$	$\frac{w^2-(7w+10)}{2}$	$w(w-5)+\frac{(w-9)}{2}$
$\frac{w^2+(w-9)w-7}{2}$	$w\frac{(w-9)}{2}-3$	$\frac{w^2+(w-11)w-5}{2}$			$4w-1$	$\frac{w^2+(6w-1)}{2}$	$3w$	$\frac{w^2+(4w+1)}{2}$	$w+1$	$\frac{w^2+(2w+3)}{2}$	2	$\frac{w^2+5}{2}$	$w(w-1)+3$	$\frac{w^2-(2w-7)}{2}$	$w(w-2)+4$			$\frac{w^2-(5w+10)}{2}$	$w(w-4)+\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2-(7w+8)}{2}$
$w\frac{(w-7)}{2}-3$	$\frac{w^2+(w-9)w-5}{2}$	$w\frac{(w-9)}{2}-2$			$\frac{w^2+(8w-1)}{2}$	$4w$	$\frac{w^2+(6w+1)}{2}$	$2w+1$	$\frac{w^2+(4w+3)}{2}$	$w+2$	$\frac{w^2+(2w+5)}{2}$	3	$\frac{w^2+7}{2}$	$w(w-1)+4$	$\frac{w^2-(2w-9)}{2}$			$w(w-3)+\frac{(w-9)}{2}$	$\frac{w^2-(5w+8)}{2}$	$w(w-4)+\frac{(w-7)}{2}$
$\frac{w^2+(w-7)w-5}{2}$	$w\frac{(w-7)}{2}-2$	$\frac{w^2+(w-9)w-3}{2}$			$5w$	$\frac{w^2+(8w+1)}{2}$	$3w+1$	$\frac{w^2+(6w+3)}{2}$	$2w+2$	$\frac{w^2+(4w+5)}{2}$	$w+3$	$\frac{w^2+(2w+7)}{2}$	4	$\frac{w^2+9}{2}$	$w(w-1)+5$			$\frac{w^2-(3w+8)}{2}$	$w(w-3)+\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2-(5w+6)}{2}$
$w\frac{(w-5)}{2}-2$	$\frac{w^2+(w-7)w-3}{2}$	$w\frac{(w-7)}{2}-1$			$\frac{w^2+(10w+1)}{2}$	$4w+1$	$\frac{w^2+(8w+3)}{2}$	$3w+2$	$\frac{w^2+(6w+5)}{2}$	$2w+3$	$\frac{w^2+(4w+7)}{2}$	$w+4$	$\frac{w^2+(2w+9)}{2}$	5	$\frac{w^2+11}{2}$			$w(w-2)+\frac{(w-7)}{2}$	$\frac{w^2-(3w+6)}{2}$	$w(w-3)+\frac{(w-5)}{2}$
$\frac{w^2+(w-5)w-3}{2}$	$w\frac{(w-5)}{2}-1$	$\frac{w^2+(w-7)w-1}{2}$																$\frac{w^2-(w+6)}{2}$	$w(w-2)+\frac{(w-5)}{2}$	$\frac{w^2-(3w+4)}{2}$
$w\frac{(w-3)}{2}-1$	$\frac{w^2+(w-5)w-1}{2}$	$w\frac{(w-5)}{2}$																$w(w-1)+\frac{(w-5)}{2}$	$\frac{w^2-(w+4)}{2}$	$w(w-2)+\frac{(w-3)}{2}$
$\frac{w^2+(w-3)w-1}{2}$	$w\frac{(w-3)}{2}$	$\frac{w^2+(w-5)w+1}{2}$	$w\frac{(w-7)}{2}+1$	$\frac{w^2+(w-7)w+3}{2}$	$w\frac{(w-9)}{2}+2$	$\frac{w^2+(w-9)w+5}{2}$	$w\frac{(w-11)}{2}+3$	$\frac{w^2+(w-11)w+7}{2}$	$w\frac{(w-13)}{2}+4$	$\frac{w^2+(w-13)w+9}{2}$	$\frac{7w-11}{2}$	$\frac{w^2+(7w-10)}{2}$	$\frac{5w-9}{2}$	$\frac{w^2+(5w-8)}{2}$	$\frac{3w-7}{2}$	$\frac{w^2+(3w-6)}{2}$	$\frac{w-5}{2}$	$\frac{w^2+(w-4)}{2}$	$w(w-1)+\frac{(w-3)}{2}$	$\frac{w^2-(w+2)}{2}$
$w\frac{(w-1)}{2}$	$\frac{w^2+(w-3)w+1}{2}$	$w\frac{(w-5)}{2}+1$	$\frac{w^2+(w-5)w+3}{2}$	$w\frac{(w-7)}{2}+2$	$\frac{w^2+(w-7)w+5}{2}$	$w\frac{(w-9)}{2}+3$	$\frac{w^2+(w-9)w+7}{2}$	$w\frac{(w-11)}{2}+4$	$\frac{w^2+(w-11)w+9}{2}$	$\frac{9w-11}{2}$	$\frac{w^2+(9w-10)}{2}$	$\frac{7w-9}{2}$	$\frac{w^2+(7w-8)}{2}$	$\frac{5w-7}{2}$	$\frac{w^2+(5w-6)}{2}$	$\frac{3w-5}{2}$	$\frac{w^2+(3w-4)}{2}$	$\frac{w-3}{2}$	$\frac{w^2+(w-2)}{2}$	$w(w-1)+\frac{(w-1)}{2}$
$\frac{w^2+(w-1)w+1}{2}$	$w\frac{(w-3)}{2}+1$	$\frac{w^2+(w-3)w+3}{2}$	$w\frac{(w-5)}{2}+2$	$\frac{w^2+(w-5)w+5}{2}$	$w\frac{(w-7)}{2}+3$	$\frac{w^2+(w-7)w+7}{2}$	$w\frac{(w-9)}{2}+4$	$\frac{w^2+(w-9)w+9}{2}$	$w\frac{(w-11)}{2}+5$	$\frac{w^2+(w-11)w+11}{2}$	$\frac{9w-9}{2}$	$\frac{w^2+(9w-8)}{2}$	$\frac{7w-7}{2}$	$\frac{w^2+(7w-6)}{2}$	$\frac{5w-5}{2}$	$\frac{w^2+(5w-4)}{2}$	$\frac{3w-3}{2}$	$\frac{w^2+(3w-2)}{2}$	$\frac{w-1}{2}$	$\frac{w^2+w}{2}$

Die Grundzahl bildet die Wurzelgrösse $= W$.

Die Summe einer Reihe $= \frac{W^3+W}{2}$; aller Reihen $= \frac{W^4+W^2}{2}$.

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme

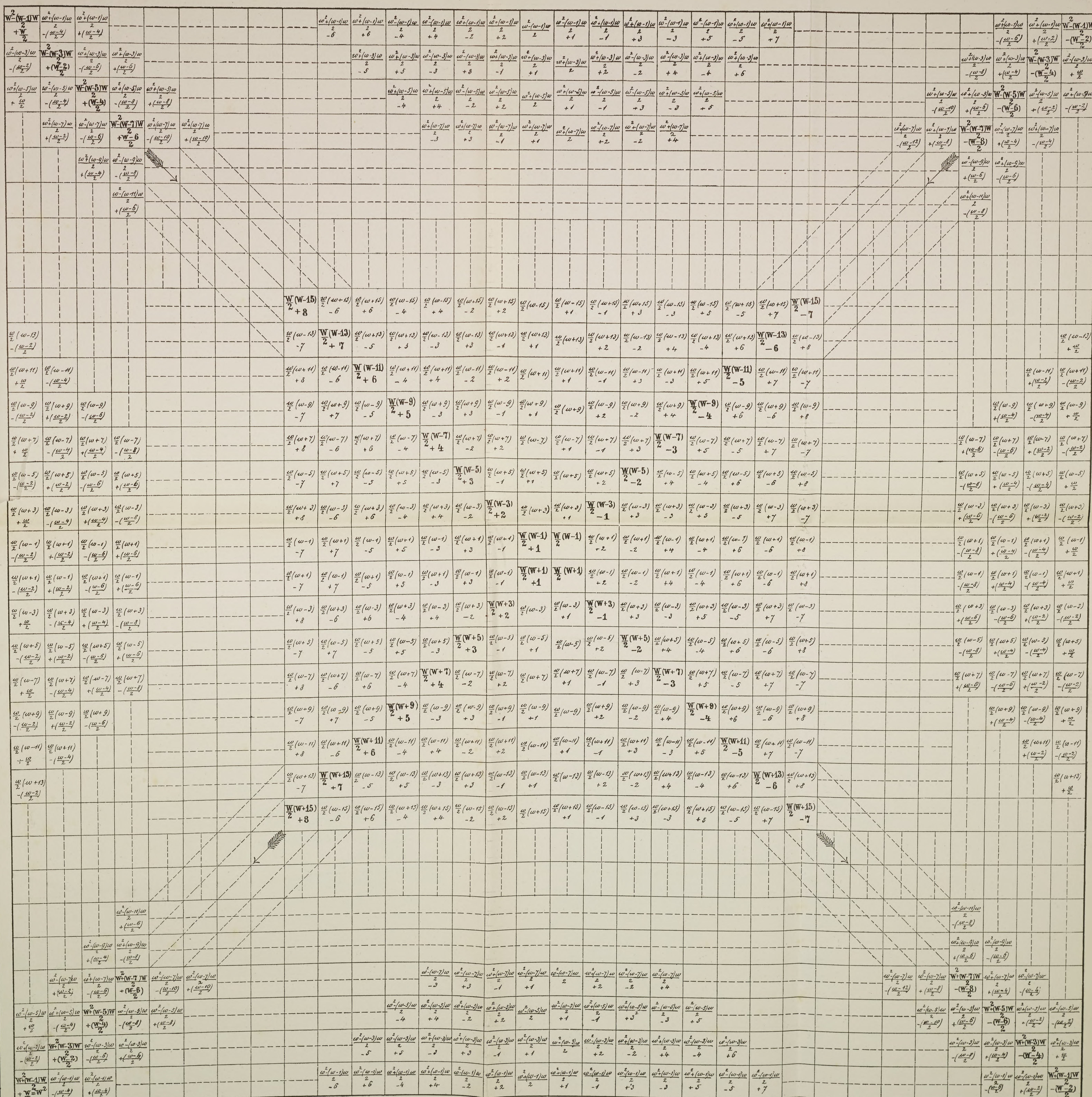
aus den

gerad-geraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 71.



Die Grundzahl bildet die Wurzelgrösse $= w$.

Die gleiche Summe $= \frac{w^3 + w}{2}$.

Die Totalsumme aller Zahlen des Tetragrammes $= \frac{w^4 + w^2}{2}$.

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme

aus den

gerad-geraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 72.

$X-\frac{W-2}{2}W+\frac{W}{2}$	$x+\frac{w}{2}\cdot w-(\frac{w-4}{2})$	$x+\frac{w}{2}\cdot w+(\frac{w-4}{2})$	$x-(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-8}{2})$					$x-(\frac{w-2}{2})w+8$	$x+\frac{w}{2}w-6$	$x+\frac{w}{2}w+6$	$x-(\frac{w-2}{2})w-4$	$x-(\frac{w-2}{2})w+4$	$x+\frac{w}{2}w-2$	$x+\frac{w}{2}w+2$	$x-(\frac{w-2}{2})w$	$x-(\frac{w-2}{2})w+1$	$x+\frac{w}{2}w-1$	$x+\frac{w}{2}w+3$	$x-(\frac{w-2}{2})w-3$	$x-(\frac{w-2}{2})w+5$	$x+\frac{w}{2}w-5$	$x+\frac{w}{2}w+7$	$x-(\frac{w-2}{2})w-7$					$x-(\frac{w-2}{2})w+(\frac{w-6}{2})$	$x+\frac{w}{2}w-(\frac{w-6}{2})$	$x+\frac{w}{2}w+(\frac{w-2}{2})$	$X-(\frac{W-2}{2})W-(\frac{W-2}{2})$
$x-(\frac{w-4}{2})w-(\frac{w-2}{2})$	$X-(\frac{W-4}{2})W+(\frac{W-2}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-6}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})w+(\frac{w-6}{2})$	$x-(\frac{w-4}{2})w-(\frac{w-10}{2})$					$x-(\frac{w-4}{2})w+7$	$x+(\frac{w-2}{2})w-5$	$x+(\frac{w-2}{2})w+5$	$x-(\frac{w-4}{2})w-3$	$x-(\frac{w-4}{2})w+3$	$x+(\frac{w-2}{2})w-1$	$x+(\frac{w-2}{2})w+1$	$x+(\frac{w-2}{2})w$	$x+(\frac{w-2}{2})w+2$	$x-(\frac{w-4}{2})w-2$	$x-(\frac{w-4}{2})w+4$	$x+(\frac{w-2}{2})w-4$	$x+(\frac{w-2}{2})w+6$	$x-(\frac{w-4}{2})w-6$					$x-(\frac{w-4}{2})w+(\frac{w-8}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-8}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})w+(\frac{w-4}{2})$	$X-(\frac{W-4}{2})W-(\frac{W-4}{2})$	$x-(\frac{w-4}{2})w+\frac{w}{2}$
$x+(\frac{w-4}{2})w+\frac{w}{2}$	$x-(\frac{w-6}{2})w-(\frac{w-4}{2})$																													$x-(\frac{w-6}{2})w+(\frac{w-2}{2})$	$x+(\frac{w-4}{2})w-(\frac{w-2}{2})$
	$x+(\frac{w-6}{2})w+(\frac{w-2}{2})$																													$x+(\frac{w-6}{2})w-(\frac{w-4}{2})$	
				$X-11W+12$	$x+12w-10$	$x+12w+10$	$x-11w-8$	$x-11w+8$	$x+12w-6$	$x+12w+6$	$x-11w-4$	$x-11w+4$	$x+12w-2$	$x+12w+2$	$x-11w$	$x-11w+1$	$x+12w-1$	$x+12w+3$	$x-11w-3$	$x-11w+5$	$x+12w-5$	$x+12w+7$	$x-11w-7$	$x-11w+9$	$x+12w-9$	$x+12w+11$	$X-11W-11$				
				$x-10w-11$	$X-10W+11$	$x+11w-9$	$x+11w+9$	$x-10w-7$	$x-10w+7$	$x+11w-5$	$x+11w+5$	$x-10w-3$	$x-10w+3$	$x+11w-1$	$x+11w+1$	$x+11w$	$x+11w+2$	$x-10w-2$	$x-10w+4$	$x+11w-4$	$x+11w+6$	$x-10w-6$	$x-10w+8$	$x+11w-8$	$x+11w+10$	$X-10W-10$	$x-10w+12$				
				$x+10w+12$	$x-9w-10$	$X-9W+10$	$x+10w-8$	$x+10w+8$	$x-9w-6$	$x-9w+6$	$x+10w-4$	$x+10w+4$	$x-9w-2$	$x-9w+2$	$x+10w$	$x+10w+1$	$x-9w-1$	$x-9w+3$	$x+10w-3$	$x+10w+5$	$x-9w-5$	$x-9w+7$	$x+10w-7$	$x+10w+9$	$X-9W-9$	$x-9w+11$	$x+10w-11$				
$x-8w-(\frac{w-2}{2})$	$x+9w+(\frac{w-2}{2})$			$x-8w-11$	$x+9w+11$	$x-8w-9$	$X-8W+9$	$x+9w-7$	$x+9w+7$	$x-8w-5$	$x-8w+5$	$x+9w-3$	$x+9w+3$	$x-8w-1$	$x+9w+1$	$x+9w$	$x-8w+2$	$x+9w-2$	$x+9w+4$	$x-8w-4$	$x-8w+6$	$x+9w-6$	$x+9w+8$	$X-8W-8$	$x-8w+10$	$x+9w-10$	$x-8w+12$			$x+9w-(\frac{w-4}{2})$	$x-8w+\frac{w}{2}$
$x+8w+\frac{w}{2}$	$x-7w-(\frac{w-4}{2})$			$x+8w+12$	$x-7w-10$	$x+8w+10$	$x-7w-8$	$X-7W+8$	$x+8w-6$	$x+8w+6$	$x-7w-4$	$x-7w+4$	$x+8w-2$	$x+8w+2$	$x-7w$	$x-7w+1$	$x+8w-1$	$x+8w+3$	$x-7w-3$	$x-7w+5$	$x+8w-5$	$x+8w+7$	$X-7W-7$	$x-7w+9$	$x+8w-9$	$x-7w+11$	$x+8w-11$			$x-7w+(\frac{w-2}{2})$	$x+8w-(\frac{w-2}{2})$
$x-6w-(\frac{w-2}{2})$	$x+7w+(\frac{w-2}{2})$			$x-6w-11$	$x+7w+11$	$x-6w-9$	$x+7w+9$	$x-6w-7$	$X-6W+7$	$x+7w-5$	$x+7w+5$	$x-6w-3$	$x-6w+3$	$x+7w-1$	$x+7w+1$	$x+7w$	$x+7w+2$	$x-6w-2$	$x-6w+4$	$x+7w-4$	$x+7w+6$	$X-6W-6$	$x-6w+8$	$x+7w-8$	$x-6w+10$	$x+7w-10$	$x-6w+12$			$x+7w-(\frac{w-4}{2})$	$x-6w+\frac{w}{2}$
$x+6w+\frac{w}{2}$	$x-5w+(\frac{w-4}{2})$			$x+6w+12$	$x-5w-10$	$x+6w+10$	$x-5w-8$	$x+6w+8$	$x-5w-6$	$X-5W+6$	$x+6w-4$	$x+6w+4$	$x-5w-2$	$x-5w+2$	$x+6w$	$x+6w+1$	$x-5w-1$	$x-5w+3$	$x+6w-3$	$x+6w+5$	$X-5W-5$	$x-5w+7$	$x+6w-7$	$x-5w+9$	$x+6w-9$	$x-5w+11$	$x+6w-11$			$x-5w+(\frac{w-2}{2})$	$x+6w-(\frac{w-2}{2})$
$x-4w-(\frac{w-2}{2})$	$x+5w+(\frac{w-2}{2})$			$x-4w-11$	$x+5w+11$	$x-4w-9$	$x+5w+9$	$x-4w-7$	$x+5w+7$	$x-4w-5$	$X-4W+5$	$x+5w-3$	$x+5w+3$	$x-4w-1$	$x+5w+1$	$x+5w$	$x-4w+2$	$x+5w-2$	$x+5w+4$	$X-4W-4$	$x-4w+6$	$x+5w-6$	$x-4w+8$	$x+5w-8$	$x-4w+10$	$x+5w-10$	$x-4w+12$			$x+5w-(\frac{w-4}{2})$	$x-4w+\frac{w}{2}$
$x+4w+\frac{w}{2}$	$x-3w-(\frac{w-4}{2})$			$x+4w+12$	$x-3w-10$	$x+4w+10$	$x-3w-8$	$x+4w+8$	$x-3w-6$	$x+4w+6$	$x-3w-4$	$X-3W+4$	$x+4w-2$	$x+4w+2$	$x-3w$	$x-3w+1$	$x+4w-1$	$x+4w+3$	$X-3W-3$	$x-3w+5$	$x+4w-5$	$x-3w+7$	$x+4w-7$	$x-3w+9$	$x+4w-9$	$x-3w+11$	$x+4w-11$			$x-3w+(\frac{w-2}{2})$	$x+4w-(\frac{w-2}{2})$
$x-2w-(\frac{w-2}{2})$	$x+3w+(\frac{w-2}{2})$			$x-2w-11$	$x+3w+11$	$x-2w-9$	$x+3w+9$	$x-2w-7$	$x+3w+7$	$x-2w-5$	$x+3w+5$	$x-2w-3$	$X-2W+3$	$x+3w-1$	$x+3w+1$	$x+3w$	$x+3w+2$	$X-2W-2$	$x-2w+4$	$x+3w-4$	$x-2w+6$	$x+3w-6$	$x-2w+8$	$x+3w-8$	$x-2w+10$	$x+3w-10$	$x-2w+12$			$x+3w-(\frac{w-4}{2})$	$x-2w+\frac{w}{2}$
$x+2w+\frac{w}{2}$	$x-w-(\frac{w-4}{2})$			$x+2w+12$	$x-w-10$	$x+2w+10$	$x-w-8$	$x+2w+8$	$x-w-6$	$x+2w+6$	$x-w-4$	$x+2w+4$	$x-w-2$	$X-W+2$	$x+2w$	$x+2w+1$	$X-W-1$	$x-w+3$	$x+2w-3$	$x-w+5$	$x+2w-5$	$x-w+7$	$x+2w-7$	$x-w+9$	$x+2w-9$	$x-w+11$	$x+2w-11$			$x-w+(\frac{w-2}{2})$	$x+2w-(\frac{w-2}{2})$
$x-(\frac{w-2}{2})$	$x+w+(\frac{w-2}{2})$			$x-11$	$x+w+11$	$x-9$	$x+w+9$	$x-7$	$x+w+7$	$x-5$	$x+w+5$	$x-3$	$x+w+3$	$x+w-1$	$X+1$	X	$x+w+2$	$x+w-2$	$x+4$	$x+w-4$	$x+6$	$x+w-6$	$x+8$	$x+w-8$	$x+10$	$x+w-10$	$x+12$			$x+w-(\frac{w-4}{2})$	$x+\frac{w}{2}$
$x+w-(\frac{w-2}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})$			$x+w-11$	$x+11$	$x+w-9$	$x+9$	$x+w-7$	$x+7$	$x+w-5$	$x+5$	$x+w-3$	$x+3$	$x-1$	$X+W+1$	$X+W$	$x+2$	$x-2$	$x+w+4$	$x-4$	$x+w+6$	$x-6$	$x+w+8$	$x-8$	$x+w+10$	$x-10$	$x+w+12$			$x-(\frac{w-4}{2})$	$x+w+\frac{w}{2}$
$x-w+\frac{w}{2}$	$x+2w-(\frac{w-4}{2})$			$x-w+12$	$x+2w-10$	$x-w+10$	$x+2w-8$	$x-w+8$	$x+2w-6$	$x-w+6$	$x+2w-4$	$x-w+4$	$x+2w-2$	$X+2W+2$	$x-w$	$x-w+1$	$X+2W-1$	$x+2w+3$	$x-w-3$	$x+2w+5$	$x-w-5$	$x+2w+7$	$x-w-7$	$x+2w+9$	$x-w-9$	$x+2w+11$	$x-w-11$			$x+2w+(\frac{w-2}{2})$	$x-w-(\frac{w-2}{2})$
$x+3w-(\frac{w-2}{2})$	$x-2w+(\frac{w-2}{2})$			$x+3w-11$	$x-2w+11$	$x+3w-9$	$x-2w+9$	$x+3w-7$	$x-2w+7$	$x+3w-5$	$x-2w+5$	$x+3w-3$	$X+3W+3$	$x-2w-1$	$x-2w+1$	$x-2w$	$x-2w+2$	$X+3W-2$	$x+3w+4$	$x-2w-4$	$x+3w+6$	$x-2w-6$	$x+3w+8$	$x-2w-8$	$x+3w+10$	$x-2w-10$	$x+3w+12$			$x-2w-(\frac{w-4}{2})$	$x+3w+\frac{w}{2}$
$x-3w+\frac{w}{2}$	$x+4w-(\frac{w-4}{2})$			$x-3w+12$	$x+4w-10$	$x-3w+10$	$x+4w-8$	$x-3w+8$	$x+4w-6$	$x-3w+6$	$x+4w-4$	$X+4W+4$	$x-3w-2$	$x-3w+2$	$x+4w$	$x+4w+1$	$x-3w-1$	$x-3w+3$	$X+4W-3$	$x+4w+5$	$x-3w-5$	$x+4w+7$	$x-3w-7$	$x+4w+9$	$x-3w-9$	$x+4w+11$	$x-3w-11$			$x+4w+(\frac{w-2}{2})$	$x-3w-(\frac{w-2}{2})$
$x+5w-(\frac{w-2}{2})$	$x-4w+(\frac{w-2}{2})$			$x+5w-11$	$x-4w+11$	$x+5w-9$	$x-4w+9$	$x+5w-7$	$x-4w+7$	$x+5w-5$	$X+5W+5$	$x-4w-3$	$x-4w+3$	$x+5w-1$	$x-4w+1$	$x-4w$	$x+5w+2$	$x-4w-2$	$x-4w+4$	$X+5W-4$	$x+5w+6$	$x-4w-6$	$x+5w+8$	$x-4w-8$	$x+5w+10$	$x-4w-10$	$x+5w+12$			$x-4w-(\frac{w-4}{2})$	$x+5w+\frac{w}{2}$
$x-5w+\frac{w}{2}$	$x+6w-(\frac{w-4}{2})$			$x-5w+12$	$x+6w-10$	$x-5w+10$	$x+6w-8$	$x-5w+8$	$x+6w-6$	$X+6W+6$	$x-5w-4$	$x-5w+4$	$x+6w-2$	$x+6w+2$	$x-5w$	$x-5w+1$	$x+6w-1$	$x+6w+3$	$x-5w-3$	$x-5w+5$	$X+6W-5$	$x+6w+7$	$x-5w-7$	$x+6w+9$	$x-5w-9$	$x+6w+11$	$x-5w-11$			$x+6w+(\frac{w-2}{2})$	$x-5w-(\frac{w-2}{2})$
$x+7w-(\frac{w-2}{2})$	$x-6w+(\frac{w-2}{2})$			$x+7w-11$	$x-6w+11$	$x+7w-9$	$x-6w+9$	$x+7w-7$	$X+7W+7$	$x-6w-5$	$x-6w+5$	$x+7w-3$	$x+7w+3$	$x-6w-1$	$x-6w+1$	$x-6w$	$x-6w+2$	$x+7w-2$	$x+7w+4$	$x-6w-4$	$x-6w+6$	$X+7W-6$	$x+7w+8$	$x-6w+8$	$x+7w+10$	$x-6w-10$	$x+7w+12$			$x-6w-(\frac{w-4}{2})$	$x+7w+\frac{w}{2}$
$x-7w+\frac{w}{2}$	$x+8w-(\frac{w-4}{2})$			$x-7w+12$	$x+8w-10$	$x-7w+10$	$x+8w-8$	$X+8W+8$	$x-7w-6$	$x-7w+6$	$x+8w-4$	$x+8w+4$	$x-7w-2$	$x-7w+2$	$x+8w$	$x+8w+1$	$x-7w-1$	$x-7w+3$	$x+8w-3$	$x+8w+5$	$x-7w-5$	$x-7w+7$	$X+8W-7$	$x+8w+9$	$x-7w-9$	$x+8w+11$	$x-7w-11$			$x+8w+(\frac{w-2}{2})$	$x-7w-(\frac{w-2}{2})$
$x+9w-(\frac{w-2}{2})$	$x-8w+(\frac{w-2}{2})$			$x+9w-11$	$x-8w+11$	$x+9w-9$	$X+9W+9$	$x-8w-7$	$x-8w+7$	$x+9w-5$	$x+9w+5$	$x-8w-3$	$x-8w+3$	$x+9w-1$	$x-8w+1$	$x-8w$	$x+9w+2$	$x-8w-2$	$x-8w+4$	$x+9w-4$	$x+9w+6$	$x-8w-6$	$x-8w+8$	$X+9W-8$	$x+9w+10$	$x-8w-10$	$x+9w+12$			$x-8w-(\frac{w-4}{2})$	$x+9w+\frac{w}{2}$
				$x-9w+12$	$x+10w-10$	$X+10W+10$	$x-9w-8$	$x-9w+8$	$x+10w-6$	$x+10w+6$	$x-9w-4$	$x-9w+4$	$x+10w-2$	$x+10w+2$	$x-9w$	$x-9w+1$	$x+10w-1$	$x+10w+3$	$x-9w-3$	$x-9w+5$	$x+10w-5$	$x+10w+7$	$x-9w-7$	$x-9w+9$	$X+10W-9$	$x+10w+11$	$x-9w-11$				
				$x+11w-11$	$X+11W+11$	$x-10w-9$	$x-10w+9$	$x+11w-7$	$x+11w+7$	$x-10w-5$	$x-10w+5$	$x+11w-3$	$x+11w+3$	$x-10w-1$	$x-10w+1$	$x-10w$	$x-10w+2$	$x+11w-2$	$x+11w+4$	$x-10w-4$	$x-10w+6$	$x+11w-6$	$x+11w+8$	$x-10w-8$	$x-10w+10$	$X+11W-10$	$x+11w+12$				
				$X+12W+12$	$x-11w-10$	$x-11w+10$	$x+12w-8$	$x+12w+8$	$x-11w-6$	$x-11w+6$	$x+12w-4$	$x+12w+4$	$x-11w-2$	$x-11w+2$	$x+12w$	$x+12w+1$	$x-11w-1$	$x-11w+3$	$x+12w-3$	$x+12w+5$	$x-11w-5$	$x-11w+7$	$x+12w-7$	$x+12w+9$	$x-11w-9$	$x-11w+11$	$X+12W-11$				
	$x-(\frac{w-8}{2})w+(\frac{w-2}{2})$																													$x-(\frac{w-8}{2})w-(\frac{w-4}{2})$	
$x-(\frac{w-6}{2})w+\frac{w}{2}$	$x+(\frac{w-4}{2})w-(\frac{w-4}{2})$																													$x+(\frac{w-4}{2})w+(\frac{w-2}{2})$	$x-(\frac{w-6}{2})w-(\frac{w-2}{2})$
$x+(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-2}{2})$	$X+(\frac{W-2}{2})W+(\frac{W-2}{2})$	$x-(\frac{w-4}{2})w-(\frac{w-6}{2})$	$x-(\frac{w-4}{2})w+(\frac{w-6}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-10}{2})$					$x+(\frac{w-2}{2})w+7$	$x-(\frac{w-4}{2})w-5$	$x-(\frac{w-4}{2})w+5$	$x+(\frac{w-2}{2})w-3$	$x+(\frac{w-2}{2})w+3$	$x-(\frac{w-4}{2})w-1$	$x-(\frac{w-4}{2})w+1$	$x-(\frac{w-2}{2})w$	$x-(\frac{w-4}{2})w+2$	$x+(\frac{w-2}{2})w-2$	$x+(\frac{w-2}{2})w+4$	$x-(\frac{w-4}{2})w-4$	$x-(\frac{w-4}{2})w+6$	$x+(\frac{w-2}{2})w-6$					$x+(\frac{w-2}{2})w+(\frac{w-8}{2})$	$x-(\frac{w-4}{2})w-(\frac{w-8}{2})$	$x-(\frac{w-4}{2})w+(\frac{w-4}{2})$	$X+(\frac{W-2}{2})W-(\frac{W-4}{2})$	$x+(\frac{w-2}{2})w+\frac{w}{2}$
$X+\frac{W}{2}W+\frac{W}{2}$	$x-(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-4}{2})$	$x-(\frac{w-2}{2})w+(\frac{w-4}{2})$	$x+\frac{w}{2}w-(\frac{w-8}{2})$					$x+\frac{w}{2}w+8$	$x-(\frac{w-2}{2})w-6$	$x-(\frac{w-2}{2})w+6$	$x+\frac{w}{2}w-4$	$x+\frac{w}{2}w+4$	$x-(\frac{w-2}{2})w-2$	$x-(\frac{w-2}{2})w+2$	$x+\frac{w}{2}w$	$x+\frac{w}{2}w+1$	$x-(\frac{w-2}{2})w-1$	$x-(\frac{w-2}{2})w+3$	$x+\frac{w}{2}w-3$	$x+\frac{w}{2}w+5$	$x-(\frac{w-2}{2})w-5$	$x-(\frac{w-2}{2})w+7$	$x+\frac{w}{2}w-7$					$x+\frac{w}{2}w+(\frac{w-6}{2})$	$x-(\frac{w-2}{2})w-(\frac{w-6}{2})$	$x-(\frac{w-2}{2})w+(\frac{w-2}{2})$	$X+\frac{W}{2}W-(\frac{W-2}{2})$

Die Leitzahl $x=\frac{w(w-1)}{2}$.

Die gleiche Summe $=\frac{w^3+w}{2}$.

Die Totalsumme aller Zahlen des Tetragrammes $=\frac{w^4+w^2}{2}$.

Tafel I.

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme

aus den

ungerad-geraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 73.

$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\frac{w}{2}=w$	$\frac{W^2+(W-1)W}{2}-\left(\frac{W-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-8}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-8}{2}\right)$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-(r+1)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+(r+1)$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-5$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+5$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-3$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+3$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-1$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+1$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+2$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-2$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+4$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-4$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+r$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-r$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-10}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-10}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-6}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-6}{2}\right)$	$\frac{W^2+(W-1)W}{2}+\left(\frac{W-2}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)=1$
$\frac{W^2-(W-3)W}{2}-\left(\frac{W-2}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{W^2+(W-3)W}{2}-\left(\frac{W-6}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-6}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-10}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-10}{2}\right)$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-r$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+r$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-4$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+4$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-2$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+2$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+1$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-1$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+3$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-3$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+5$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-5$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+(r+1)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-(r+1)$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-8}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-8}{2}\right)$	$\frac{W^2+(W-3)W}{2}+\left(\frac{W-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{W^2+(W-3)W}{2}+\frac{W}{2}$
$\frac{w^2+(w-5)w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{W^2-(W-5)W}{2}-\left(\frac{W-4}{2}\right)$																															$\frac{W^2-(W-5)W}{2}+\left(\frac{W-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-5)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-(w-7)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-7)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$																															$\frac{w^2+(w-7)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-7)w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+(w-9)w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-(w-9)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2-25w}{2}+13$	$\frac{W^2+25W}{2}-11$	$\frac{w^2-25w}{2}+11$	$\frac{w^2+25w}{2}-9$	$\frac{w^2-25w}{2}+9$	$\frac{w^2+25w}{2}-7$	$\frac{w^2-25w}{2}+7$	$\frac{w^2+25w}{2}-5$	$\frac{w^2-25w}{2}+5$	$\frac{w^2+25w}{2}-3$	$\frac{w^2-25w}{2}+3$	$\frac{w^2+25w}{2}-1$	$\frac{w^2+25w}{2}$	$\frac{w^2-25w}{2}+1$	$\frac{w^2+25w}{2}+2$	$\frac{w^2-25w}{2}-2$	$\frac{w^2+25w}{2}+4$	$\frac{w^2-25w}{2}-4$	$\frac{w^2+25w}{2}+6$	$\frac{w^2-25w}{2}-6$	$\frac{w^2+25w}{2}+8$	$\frac{w^2-25w}{2}-8$	$\frac{w^2+25w}{2}+10$	$\frac{w^2-25w}{2}-10$	$\frac{W^2+25W}{2}+12$	$\frac{w^2-25w}{2}-12$			$\frac{w^2-(w-9)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-9)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-(w-11)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-11)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{W^2-23W}{2}-12$	$\frac{w^2-23w}{2}+12$	$\frac{W^2+23W}{2}-10$	$\frac{w^2-23w}{2}+10$	$\frac{w^2+23w}{2}-8$	$\frac{w^2-23w}{2}+8$	$\frac{w^2+23w}{2}-6$	$\frac{w^2-23w}{2}+6$	$\frac{w^2+23w}{2}-4$	$\frac{w^2-23w}{2}+4$	$\frac{w^2+23w}{2}-2$	$\frac{w^2-23w}{2}+2$	$\frac{w^2+23w}{2}+1$	$\frac{w^2+23w}{2}$	$\frac{w^2-23w}{2}-1$	$\frac{w^2+23w}{2}+3$	$\frac{w^2-23w}{2}-3$	$\frac{w^2+23w}{2}+5$	$\frac{w^2-23w}{2}-5$	$\frac{w^2+23w}{2}+7$	$\frac{w^2-23w}{2}-7$	$\frac{w^2+23w}{2}+9$	$\frac{w^2-23w}{2}-9$	$\frac{W^2+23W}{2}+11$	$\frac{w^2-23w}{2}-11$	$\frac{W^2+23W}{2}+13$			$\frac{w^2+(w-11)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-11)w}{2}+\frac{w}{2}$
				$\frac{w^2+21w}{2}+13$	$\frac{W^2-21W}{2}-11$	$\frac{w^2-21w}{2}+11$	$\frac{W^2+21W}{2}-9$	$\frac{w^2-21w}{2}+9$	$\frac{w^2+21w}{2}-7$	$\frac{w^2-21w}{2}+7$	$\frac{w^2+21w}{2}-5$	$\frac{w^2-21w}{2}+5$	$\frac{w^2+21w}{2}-3$	$\frac{w^2-21w}{2}+3$	$\frac{w^2+21w}{2}-1$	$\frac{w^2+21w}{2}$	$\frac{w^2-21w}{2}+1$	$\frac{w^2+21w}{2}+2$	$\frac{w^2-21w}{2}-2$	$\frac{w^2+21w}{2}+4$	$\frac{w^2-21w}{2}-4$	$\frac{w^2+21w}{2}+6$	$\frac{w^2-21w}{2}-6$	$\frac{w^2+21w}{2}+8$	$\frac{w^2-21w}{2}-8$	$\frac{W^2+21W}{2}+10$	$\frac{w^2-21w}{2}-10$	$\frac{W^2-21W}{2}+12$	$\frac{w^2+21w}{2}-12$				
				$\frac{w^2-19w}{2}-12$	$\frac{w^2+19w}{2}+12$	$\frac{W^2-19W}{2}-10$	$\frac{w^2-19w}{2}+10$	$\frac{W^2+19W}{2}-8$	$\frac{w^2-19w}{2}+8$	$\frac{w^2+19w}{2}-6$	$\frac{w^2-19w}{2}+6$	$\frac{w^2+19w}{2}-4$	$\frac{w^2-19w}{2}+4$	$\frac{w^2+19w}{2}-2$	$\frac{w^2-19w}{2}+2$	$\frac{w^2+19w}{2}+1$	$\frac{w^2+19w}{2}$	$\frac{w^2-19w}{2}-1$	$\frac{w^2+19w}{2}+3$	$\frac{w^2-19w}{2}-3$	$\frac{w^2+19w}{2}+5$	$\frac{w^2-19w}{2}-5$	$\frac{w^2+19w}{2}+7$	$\frac{w^2-19w}{2}-7$	$\frac{W^2+19W}{2}+9$	$\frac{w^2-19w}{2}-9$	$\frac{W^2+19W}{2}+11$	$\frac{w^2+19w}{2}-11$	$\frac{w^2-19w}{2}+13$				
$\frac{w^2+17w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-17w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+17w}{2}+13$	$\frac{w^2-17w}{2}-11$	$\frac{w^2+17w}{2}+11$	$\frac{W^2-17W}{2}-9$	$\frac{w^2-17w}{2}+9$	$\frac{W^2+17W}{2}-7$	$\frac{w^2-17w}{2}+7$	$\frac{w^2+17w}{2}-5$	$\frac{w^2-17w}{2}+5$	$\frac{w^2+17w}{2}-3$	$\frac{w^2-17w}{2}+3$	$\frac{w^2+17w}{2}-1$	$\frac{w^2+17w}{2}$	$\frac{w^2-17w}{2}+1$	$\frac{w^2+17w}{2}+2$	$\frac{w^2-17w}{2}-2$	$\frac{w^2+17w}{2}+4$	$\frac{w^2-17w}{2}-4$	$\frac{w^2+17w}{2}+6$	$\frac{w^2-17w}{2}-6$	$\frac{W^2+17W}{2}+8$	$\frac{w^2-17w}{2}-8$	$\frac{W^2-17W}{2}+10$	$\frac{w^2+17w}{2}-10$	$\frac{w^2-17w}{2}+12$	$\frac{w^2+17w}{2}-12$			$\frac{w^2-17w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+17w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-15w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+15w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-15w}{2}-12$	$\frac{w^2+15w}{2}+12$	$\frac{w^2-15w}{2}-10$	$\frac{w^2+15w}{2}+10$	$\frac{W^2-15W}{2}-8$	$\frac{w^2-15w}{2}+8$	$\frac{W^2+15W}{2}-6$	$\frac{w^2-15w}{2}+6$	$\frac{w^2+15w}{2}-4$	$\frac{w^2-15w}{2}+4$	$\frac{w^2+15w}{2}-2$	$\frac{w^2-15w}{2}+2$	$\frac{w^2+15w}{2}+1$	$\frac{w^2+15w}{2}$	$\frac{w^2-15w}{2}-1$	$\frac{w^2+15w}{2}+3$	$\frac{w^2-15w}{2}-3$	$\frac{w^2+15w}{2}+5$	$\frac{w^2-15w}{2}-5$	$\frac{W^2+15W}{2}+7$	$\frac{w^2-15w}{2}-7$	$\frac{W^2+15W}{2}+9$	$\frac{w^2+15w}{2}-9$	$\frac{w^2-15w}{2}+11$	$\frac{w^2+15w}{2}-11$	$\frac{w^2-15w}{2}+13$			$\frac{w^2+15w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-15w}{2}+\frac{w}{2}$
				$\frac{w^2+13w}{2}+13$	$\frac{w^2-13w}{2}-11$	$\frac{w^2+13w}{2}+11$	$\frac{w^2-13w}{2}-9$	$\frac{w^2+13w}{2}+9$	$\frac{W^2-13W}{2}-7$	$\frac{w^2-13w}{2}+7$	$\frac{W^2+13W}{2}-5$	$\frac{w^2-13w}{2}+5$	$\frac{w^2+13w}{2}-3$	$\frac{w^2-13w}{2}+3$	$\frac{w^2+13w}{2}-1$	$\frac{w^2+13w}{2}$	$\frac{w^2-13w}{2}+1$	$\frac{w^2+13w}{2}+2$	$\frac{w^2-13w}{2}-2$	$\frac{w^2+13w}{2}+4$	$\frac{w^2-13w}{2}-4$	$\frac{W^2+13W}{2}+6$	$\frac{w^2-13w}{2}-6$	$\frac{W^2-13W}{2}+8$	$\frac{w^2+13w}{2}-8$	$\frac{w^2-13w}{2}+10$	$\frac{w^2+13w}{2}-10$	$\frac{w^2-13w}{2}+12$	$\frac{w^2+13w}{2}-12$				
				$\frac{w^2-11w}{2}-12$	$\frac{w^2+11w}{2}+12$	$\frac{w^2-11w}{2}-10$	$\frac{w^2+11w}{2}+10$	$\frac{w^2-11w}{2}-8$	$\frac{w^2+11w}{2}+8$	$\frac{W^2-11W}{2}-6$	$\frac{w^2-11w}{2}+6$	$\frac{W^2+11W}{2}-4$	$\frac{w^2-11w}{2}+4$	$\frac{w^2+11w}{2}-2$	$\frac{w^2-11w}{2}+2$	$\frac{w^2+11w}{2}+1$	$\frac{w^2+11w}{2}$	$\frac{w^2-11w}{2}-1$	$\frac{w^2+11w}{2}+3$	$\frac{w^2-11w}{2}-3$	$\frac{W^2+11W}{2}+5$	$\frac{w^2-11w}{2}-5$	$\frac{W^2+11W}{2}+7$	$\frac{w^2+11w}{2}-7$	$\frac{w^2-11w}{2}+9$	$\frac{w^2+11w}{2}-9$	$\frac{w^2-11w}{2}+11$	$\frac{w^2+11w}{2}-11$	$\frac{w^2-11w}{2}+13$				
$\frac{w^2+9w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-9w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+9w}{2}+13$	$\frac{w^2-9w}{2}-11$	$\frac{w^2+9w}{2}+11$	$\frac{w^2-9w}{2}-9$	$\frac{w^2+9w}{2}+9$	$\frac{w^2-9w}{2}-7$	$\frac{w^2+9w}{2}+7$	$\frac{W^2-9W}{2}-5$	$\frac{w^2-9w}{2}+5$	$\frac{W^2+9W}{2}-3$	$\frac{w^2-9w}{2}+3$	$\frac{w^2+9w}{2}-1$	$\frac{w^2+9w}{2}$	$\frac{w^2-9w}{2}+1$	$\frac{w^2+9w}{2}+2$	$\frac{w^2-9w}{2}-2$	$\frac{W^2+9W}{2}+4$	$\frac{w^2-9w}{2}-4$	$\frac{W^2-9W}{2}+6$	$\frac{w^2+9w}{2}-6$	$\frac{w^2-9w}{2}+8$	$\frac{w^2+9w}{2}-8$	$\frac{w^2-9w}{2}+10$	$\frac{w^2+9w}{2}-10$	$\frac{w^2-9w}{2}+12$	$\frac{w^2+9w}{2}-12$			$\frac{w^2-9w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+9w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-7w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+7w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-7w}{2}-12$	$\frac{w^2+7w}{2}+12$	$\frac{w^2-7w}{2}-10$	$\frac{w^2+7w}{2}+10$	$\frac{w^2-7w}{2}-8$	$\frac{w^2+7w}{2}+8$	$\frac{w^2-7w}{2}-6$	$\frac{w^2+7w}{2}+6$	$\frac{W^2-7W}{2}-4$	$\frac{w^2-7w}{2}+4$	$\frac{W^2+7W}{2}-2$	$\frac{w^2-7w}{2}+2$	$\frac{w^2+7w}{2}+1$	$\frac{w^2+7w}{2}$	$\frac{w^2-7w}{2}-1$	$\frac{W^2+7W}{2}+3$	$\frac{w^2-7w}{2}-3$	$\frac{W^2+7W}{2}+5$	$\frac{w^2+7w}{2}-5$	$\frac{w^2-7w}{2}+7$	$\frac{w^2+7w}{2}-7$	$\frac{w^2-7w}{2}+9$	$\frac{w^2+7w}{2}-9$	$\frac{w^2-7w}{2}+11$	$\frac{w^2+7w}{2}-11$	$\frac{w^2-7w}{2}+13$			$\frac{w^2+7w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-7w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+5w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-5w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+5w}{2}+13$	$\frac{w^2-5w}{2}-11$	$\frac{w^2+5w}{2}+11$	$\frac{w^2-5w}{2}-9$	$\frac{w^2+5w}{2}+9$	$\frac{w^2-5w}{2}-7$	$\frac{w^2+5w}{2}+7$	$\frac{w^2-5w}{2}-5$	$\frac{w^2+5w}{2}+5$	$\frac{W^2-5W}{2}-3$	$\frac{w^2-5w}{2}+3$	$\frac{W^2+5W}{2}-1$	$\frac{w^2-5w}{2}$	$\frac{w^2+5w}{2}+1$	$\frac{W^2+5W}{2}+2$	$\frac{w^2-5w}{2}-2$	$\frac{W^2-5W}{2}+4$	$\frac{w^2+5w}{2}-4$	$\frac{w^2-5w}{2}+6$	$\frac{w^2+5w}{2}-6$	$\frac{w^2-5w}{2}+8$	$\frac{w^2+5w}{2}-8$	$\frac{w^2-5w}{2}+10$	$\frac{w^2+5w}{2}-10$	$\frac{w^2-5w}{2}+12$	$\frac{w^2+5w}{2}-12$			$\frac{w^2-5w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+5w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-3w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+3w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-3w}{2}-12$	$\frac{w^2+3w}{2}+12$	$\frac{w^2-3w}{2}-10$	$\frac{w^2+3w}{2}+10$	$\frac{w^2-3w}{2}-8$	$\frac{w^2+3w}{2}+8$	$\frac{w^2-3w}{2}-6$	$\frac{w^2+3w}{2}+6$	$\frac{w^2-3w}{2}-4$	$\frac{w^2+3w}{2}+4$	$\frac{W^2-3W}{2}-2$	$\frac{w^2-3w}{2}+2$	$\frac{W^2+3W}{2}$	$\frac{W^2+3W}{2}+1$	$\frac{w^2-3w}{2}-1$	$\frac{W^2+3W}{2}+3$	$\frac{w^2+3w}{2}-3$	$\frac{w^2-3w}{2}+5$	$\frac{w^2+3w}{2}-5$	$\frac{w^2-3w}{2}+7$	$\frac{w^2+3w}{2}-7$	$\frac{w^2-3w}{2}+9$	$\frac{w^2+3w}{2}-9$	$\frac{w^2-3w}{2}+11$	$\frac{w^2+3w}{2}-11$	$\frac{w^2-3w}{2}+13$			$\frac{w^2+3w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-3w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+w}{2}+13$	$\frac{w^2-w}{2}-11$	$\frac{w^2+w}{2}+11$	$\frac{w^2-w}{2}-9$	$\frac{w^2+w}{2}+9$	$\frac{w^2-w}{2}-7$	$\frac{w^2+w}{2}+7$	$\frac{w^2-w}{2}-5$	$\frac{w^2+w}{2}+5$	$\frac{w^2-w}{2}-3$	$\frac{w^2+w}{2}+3$	$\frac{W^2-W}{2}-1$	$\frac{w^2-w}{2}+1$	$\frac{w^2-w}{2}$	$\frac{W^2+W}{2}+2$	$\frac{w^2+w}{2}-2$	$\frac{w^2-w}{2}+4$	$\frac{w^2+w}{2}-4$	$\frac{w^2-w}{2}+6$	$\frac{w^2+w}{2}-6$	$\frac{w^2-w}{2}+8$	$\frac{w^2+w}{2}-8$	$\frac{w^2-w}{2}+10$	$\frac{w^2+w}{2}-10$	$\frac{w^2-w}{2}+12$	$\frac{w^2+w}{2}-12$			$\frac{w^2-w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-w}{2}-12$	$\frac{w^2+w}{2}+12$	$\frac{w^2-w}{2}-10$	$\frac{w^2+w}{2}+10$	$\frac{w^2-w}{2}-8$	$\frac{w^2+w}{2}+8$	$\frac{w^2-w}{2}-6$	$\frac{w^2+w}{2}+6$	$\frac{w^2-w}{2}-4$	$\frac{w^2+w}{2}+4$	$\frac{w^2-w}{2}-2$	$\frac{W^2+W}{2}-1$	$\frac{w^2+w}{2}+1$	$\frac{w^2+w}{2}$	$\frac{W^2-W}{2}+2$	$\frac{w^2-w}{2}+3$	$\frac{w^2+w}{2}-3$	$\frac{w^2-w}{2}+5$	$\frac{w^2+w}{2}-5$	$\frac{w^2-w}{2}+7$	$\frac{w^2+w}{2}-7$	$\frac{w^2-w}{2}+9$	$\frac{w^2+w}{2}-9$	$\frac{w^2-w}{2}+11$	$\frac{w^2+w}{2}-11$	$\frac{w^2-w}{2}+13$			$\frac{w^2+w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+3w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-3w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+3w}{2}+13$	$\frac{w^2-3w}{2}-11$	$\frac{w^2+3w}{2}+11$	$\frac{w^2-3w}{2}-9$	$\frac{w^2+3w}{2}+9$	$\frac{w^2-3w}{2}-7$	$\frac{w^2+3w}{2}+7$	$\frac{w^2-3w}{2}-5$	$\frac{w^2+3w}{2}+5$	$\frac{w^2-3w}{2}-3$	$\frac{W^2+3W}{2}-2$	$\frac{w^2+3w}{2}+2$	$\frac{W^2-3W}{2}+1$	$\frac{W^2-3W}{2}$	$\frac{w^2+3w}{2}-1$	$\frac{W^2-3W}{2}+3$	$\frac{w^2-3w}{2}+4$	$\frac{w^2+3w}{2}-4$	$\frac{w^2-3w}{2}+6$	$\frac{w^2+3w}{2}-6$	$\frac{w^2-3w}{2}+8$	$\frac{w^2+3w}{2}-8$	$\frac{w^2-3w}{2}+10$	$\frac{w^2+3w}{2}-10$	$\frac{w^2-3w}{2}+12$	$\frac{w^2+3w}{2}-12$			$\frac{w^2-3w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+3w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-5w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+5w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-5w}{2}-12$	$\frac{w^2+5w}{2}+12$	$\frac{w^2-5w}{2}-10$	$\frac{w^2+5w}{2}+10$	$\frac{w^2-5w}{2}-8$	$\frac{w^2+5w}{2}+8$	$\frac{w^2-5w}{2}-6$	$\frac{w^2+5w}{2}+6$	$\frac{w^2-5w}{2}-4$	$\frac{W^2+5W}{2}-3$	$\frac{w^2+5w}{2}+3$	$\frac{W^2-5W}{2}+2$	$\frac{w^2+5w}{2}$	$\frac{w^2-5w}{2}+1$	$\frac{W^2-5W}{2}-1$	$\frac{w^2+5w}{2}-2$	$\frac{W^2+5W}{2}+4$	$\frac{w^2-5w}{2}+5$	$\frac{w^2+5w}{2}-5$	$\frac{w^2-5w}{2}+7$	$\frac{w^2+5w}{2}-7$	$\frac{w^2-5w}{2}+9$	$\frac{w^2+5w}{2}-9$	$\frac{w^2-5w}{2}+11$	$\frac{w^2+5w}{2}-11$	$\frac{w^2-5w}{2}+13$			$\frac{w^2+5w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-5w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+7w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-7w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+7w}{2}+13$	$\frac{w^2-7w}{2}-11$	$\frac{w^2+7w}{2}+11$	$\frac{w^2-7w}{2}-9$	$\frac{w^2+7w}{2}+9$	$\frac{w^2-7w}{2}-7$	$\frac{w^2+7w}{2}+7$	$\frac{w^2-7w}{2}-5$	$\frac{W^2+7W}{2}-4$	$\frac{w^2+7w}{2}+4$	$\frac{W^2-7W}{2}+3$	$\frac{w^2+7w}{2}-1$	$\frac{w^2-7w}{2}+1$	$\frac{w^2-7w}{2}$	$\frac{w^2+7w}{2}+2$	$\frac{W^2-7W}{2}-2$	$\frac{w^2+7w}{2}-3$	$\frac{W^2-7W}{2}+5$	$\frac{w^2-7w}{2}+6$	$\frac{w^2+7w}{2}-6$	$\frac{w^2-7w}{2}+8$	$\frac{w^2+7w}{2}-8$	$\frac{w^2-7w}{2}+10$	$\frac{w^2+7w}{2}-10$	$\frac{w^2-7w}{2}+12$	$\frac{w^2+7w}{2}-12$			$\frac{w^2-7w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+7w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-9w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+9w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-9w}{2}-12$	$\frac{w^2+9w}{2}+12$	$\frac{w^2-9w}{2}-10$	$\frac{w^2+9w}{2}+10$	$\frac{w^2-9w}{2}-8$	$\frac{w^2+9w}{2}+8$	$\frac{w^2-9w}{2}-6$	$\frac{W^2+9W}{2}-5$	$\frac{w^2+9w}{2}+5$	$\frac{W^2-9W}{2}+4$	$\frac{w^2+9w}{2}-2$	$\frac{w^2-9w}{2}+2$	$\frac{w^2-9w}{2}$	$\frac{w^2+9w}{2}+1$	$\frac{w^2-9w}{2}-1$	$\frac{w^2+9w}{2}+3$	$\frac{W^2-9W}{2}-3$	$\frac{w^2+9w}{2}-4$	$\frac{W^2+9W}{2}+6$	$\frac{w^2-9w}{2}+7$	$\frac{w^2+9w}{2}-7$	$\frac{w^2-9w}{2}+9$	$\frac{w^2+9w}{2}-9$	$\frac{w^2-9w}{2}+11$	$\frac{w^2+9w}{2}-11$	$\frac{w^2-9w}{2}+13$			$\frac{w^2+9w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-9w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+11w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-11w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+11w}{2}+13$	$\frac{w^2-11w}{2}-11$	$\frac{w^2+11w}{2}+11$	$\frac{w^2-11w}{2}-9$	$\frac{w^2+11w}{2}+9$	$\frac{w^2-11w}{2}-7$	$\frac{W^2+11W}{2}-6$	$\frac{w^2+11w}{2}+6$	$\frac{W^2-11W}{2}+5$	$\frac{w^2+11w}{2}-3$	$\frac{w^2-11w}{2}+3$	$\frac{w^2+11w}{2}-1$	$\frac{w^2-11w}{2}+1$	$\frac{w^2-11w}{2}$	$\frac{w^2+11w}{2}+2$	$\frac{w^2-11w}{2}-2$	$\frac{w^2+11w}{2}+4$	$\frac{W^2-11W}{2}-4$	$\frac{w^2+11w}{2}-5$	$\frac{W^2-11W}{2}+7$	$\frac{w^2-11w}{2}+8$	$\frac{w^2+11w}{2}-8$	$\frac{w^2-11w}{2}+10$	$\frac{w^2+11w}{2}-10$	$\frac{w^2-11w}{2}+12$	$\frac{w^2+11w}{2}-12$			$\frac{w^2-11w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+11w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
				$\frac{w^2-13w}{2}-12$	$\frac{w^2+13w}{2}+12$	$\frac{w^2-13w}{2}-10$	$\frac{w^2+13w}{2}+10$	$\frac{w^2-13w}{2}-8$	$\frac{W^2+13W}{2}-7$	$\frac{w^2+13w}{2}+7$	$\frac{W^2-13W}{2}+6$	$\frac{w^2+13w}{2}-4$	$\frac{w^2-13w}{2}+4$	$\frac{w^2+13w}{2}-2$	$\frac{w^2-13w}{2}+2$	$\frac{w^2-13w}{2}$	$\frac{w^2+13w}{2}+1$	$\frac{w^2-13w}{2}-1$	$\frac{w^2+13w}{2}+3$	$\frac{w^2-13w}{2}-3$	$\frac{w^2+13w}{2}+5$	$\frac{W^2-13W}{2}-5$	$\frac{w^2+13w}{2}-6$	$\frac{W^2+13W}{2}+8$	$\frac{w^2-13w}{2}+9$	$\frac{w^2+13w}{2}-9$	$\frac{w^2-13w}{2}+11$	$\frac{w^2+13w}{2}-11$	$\frac{w^2-13w}{2}+13$				
				$\frac{w^2+15w}{2}+13$	$\frac{w^2-15w}{2}-11$	$\frac{w^2+15w}{2}+11$	$\frac{w^2-15w}{2}-9$	$\frac{W^2+15W}{2}-8$	$\frac{w^2+15w}{2}+8$	$\frac{W^2-15W}{2}+7$	$\frac{w^2+15w}{2}-5$	$\frac{w^2-15w}{2}+5$	$\frac{w^2+15w}{2}-3$	$\frac{w^2-15w}{2}+3$	$\frac{w^2+15w}{2}-1$	$\frac{w^2-15w}{2}+1$	$\frac{w^2-15w}{2}$	$\frac{w^2+15w}{2}+2$	$\frac{w^2-15w}{2}-2$	$\frac{w^2+15w}{2}+4$	$\frac{w^2-15w}{2}-4$	$\frac{w^2+15w}{2}+6$	$\frac{W^2-15W}{2}-6$	$\frac{w^2+15w}{2}-7$	$\frac{W^2-15W}{2}+9$	$\frac{w^2-15w}{2}+10$	$\frac{w^2+15w}{2}-10$	$\frac{w^2-15w}{2}+12$	$\frac{w^2+15w}{2}-12$				
$\frac{w^2-17w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+17w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2-17w}{2}-12$	$\frac{w^2+17w}{2}+12$	$\frac{w^2-17w}{2}-10$	$\frac{W^2+17W}{2}-9$	$\frac{w^2+17w}{2}+9$	$\frac{W^2-17W}{2}+8$	$\frac{w^2+17w}{2}-6$	$\frac{w^2-17w}{2}+6$	$\frac{w^2+17w}{2}-4$	$\frac{w^2-17w}{2}+4$	$\frac{w^2+17w}{2}-2$	$\frac{w^2-17w}{2}+2$	$\frac{w^2-17w}{2}$	$\frac{w^2+17w}{2}+1$	$\frac{w^2-17w}{2}-1$	$\frac{w^2+17w}{2}+3$	$\frac{w^2-17w}{2}-3$	$\frac{w^2+17w}{2}+5$	$\frac{w^2-17w}{2}-5$	$\frac{w^2+17w}{2}+7$	$\frac{W^2-17W}{2}-7$	$\frac{w^2+17w}{2}-8$	$\frac{W^2+17W}{2}+10$	$\frac{w^2-17w}{2}+11$	$\frac{w^2+17w}{2}-11$	$\frac{w^2-17w}{2}+13$			$\frac{w^2+17w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-17w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+19w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-19w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$			$\frac{w^2+19w}{2}+13$	$\frac{w^2-19w}{2}-11$	$\frac{W^2+19W}{2}-10$	$\frac{w^2+19w}{2}+10$	$\frac{W^2-19W}{2}+9$	$\frac{w^2+19w}{2}-7$	$\frac{w^2-19w}{2}+7$	$\frac{w^2+19w}{2}-5$	$\frac{w^2-19w}{2}+5$	$\frac{w^2+19w}{2}-3$	$\frac{w^2-19w}{2}+3$	$\frac{w^2+19w}{2}-1$	$\frac{w^2-19w}{2}+1$	$\frac{w^2-19w}{2}$	$\frac{w^2+19w}{2}+2$	$\frac{w^2-19w}{2}-2$	$\frac{w^2+19w}{2}+4$	$\frac{w^2-19w}{2}-4$	$\frac{w^2+19w}{2}+6$	$\frac{w^2-19w}{2}-6$	$\frac{w^2+19w}{2}+8$	$\frac{W^2-19W}{2}-8$	$\frac{w^2+19w}{2}-9$	$\frac{W^2-19W}{2}+11$	$\frac{w^2-19w}{2}+12$	$\frac{w^2+19w}{2}-12$			$\frac{w^2-19w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+19w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
				$\frac{w^2-21w}{2}-12$	$\frac{W^2+21W}{2}-11$	$\frac{w^2+21w}{2}+11$	$\frac{W^2-21W}{2}+10$	$\frac{w^2+21w}{2}-8$	$\frac{w^2-21w}{2}+8$	$\frac{w^2+21w}{2}-6$	$\frac{w^2-21w}{2}+6$	$\frac{w^2+21w}{2}-4$	$\frac{w^2-21w}{2}+4$	$\frac{w^2+21w}{2}-2$	$\frac{w^2-21w}{2}+2$	$\frac{w^2-21w}{2}$	$\frac{w^2+21w}{2}+1$	$\frac{w^2-21w}{2}-1$	$\frac{w^2+21w}{2}+3$	$\frac{w^2-21w}{2}-3$	$\frac{w^2+21w}{2}+5$	$\frac{w^2-21w}{2}-5$	$\frac{w^2+21w}{2}+7$	$\frac{w^2-21w}{2}-7$	$\frac{w^2+21w}{2}+9$	$\frac{W^2-21W}{2}-9$	$\frac{w^2+21w}{2}-10$	$\frac{W^2+21W}{2}+12$	$\frac{w^2-21w}{2}+13$				
				$\frac{W^2+23W}{2}-12$	$\frac{w^2+23w}{2}+12$	$\frac{W^2-23W}{2}+11$	$\frac{w^2+23w}{2}-9$	$\frac{w^2-23w}{2}+9$	$\frac{w^2+23w}{2}-7$	$\frac{w^2-23w}{2}+7$	$\frac{w^2+23w}{2}-5$	$\frac{w^2-23w}{2}+5$	$\frac{w^2+23w}{2}-3$	$\frac{w^2-23w}{2}+3$	$\frac{w^2+23w}{2}-1$	$\frac{w^2-23w}{2}+1$	$\frac{w^2-23w}{2}$	$\frac{w^2+23w}{2}+2$	$\frac{w^2-23w}{2}-2$	$\frac{w^2+23w}{2}+4$	$\frac{w^2-23w}{2}-4$	$\frac{w^2+23w}{2}+6$	$\frac{w^2-23w}{2}-6$	$\frac{w^2+23w}{2}+8$	$\frac{w^2-23w}{2}-8$	$\frac{w^2+23w}{2}+10$	$\frac{W^2-23W}{2}-10$	$\frac{w^2+23w}{2}-11$	$\frac{W^2-23W}{2}+13$				
$\frac{w^2-(w-9)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-9)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$			$\frac{w^2+25w}{2}+13$	$\frac{W^2-25W}{2}+12$	$\frac{w^2+25w}{2}-10$	$\frac{w^2-25w}{2}+10$	$\frac{w^2+25w}{2}-8$	$\frac{w^2-25w}{2}+8$	$\frac{w^2+25w}{2}-6$	$\frac{w^2-25w}{2}+6$	$\frac{w^2+25w}{2}-4$	$\frac{w^2-25w}{2}+4$	$\frac{w^2+25w}{2}-2$	$\frac{w^2-25w}{2}+2$	$\frac{w^2-25w}{2}$	$\frac{w^2+25w}{2}+1$	$\frac{w^2-25w}{2}-1$	$\frac{w^2+25w}{2}+3$	$\frac{w^2-25w}{2}-3$	$\frac{w^2+25w}{2}+5$	$\frac{w^2-25w}{2}-5$	$\frac{w^2+25w}{2}+7$	$\frac{w^2-25w}{2}-7$	$\frac{w^2+25w}{2}+9$	$\frac{w^2-25w}{2}-9$	$\frac{w^2+25w}{2}+11$	$\frac{W^2-25W}{2}-11$	$\frac{w^2+25w}{2}-12$			$\frac{w^2+(w-9)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-9)w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{w^2+(w-7)w}{2}+\frac{w}{2}$	$\frac{w^2-(w-7)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$																															$\frac{w^2-(w-7)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-7)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$
$\frac{w^2-(w-5)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{W^2+(W-5)W}{2}-\left(\frac{W-4}{2}\right)$																															$\frac{W^2+(W-5)W}{2}+\left(\frac{W-2}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-5)w}{2}+\frac{w}{2}$
$\frac{W^2+(W-3)W}{2}-\left(\frac{W-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-2}{2}\right)$	$\frac{W^2-(W-3)W}{2}+\left(\frac{W-4}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-8}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-8}{2}\right)$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-(r+1)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+(r+1)$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-5$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+5$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-3$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+3$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-1$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}+1$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+2$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-2$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+4$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-4$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+r$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-r$			$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-10}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-10}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}+\left(\frac{w-6}{2}\right)$	$\frac{W^2-(W-3)W}{2}-\left(\frac{W-6}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-3)w}{2}-\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{W^2-(W-3)W}{2}+\frac{W}{2}$
$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+\frac{w}{2}=w^2$	$\frac{W^2-(W-1)W}{2}+\left(\frac{W-2}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-6}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-6}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-10}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-10}{2}\right)$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-r$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+r$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-4$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+4$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-2$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}+2$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+1$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-1$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+3$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-3$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+5$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-5$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+(r+1)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-(r+1)$			$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-8}{2}\right)$	$\frac{w^2-(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-8}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}+\left(\frac{w-4}{2}\right)$	$\frac{W^2-(W-1)W}{2}-\left(\frac{W-4}{2}\right)$	$\frac{w^2+(w-1)w}{2}-\left(\frac{w-2}{2}\right)$

Die Grundzahl bildet die Wurzelgrösse $= W$.

Die Summe einer Reihe $= \frac{W^3+W}{2}$; aller Reihen $= \frac{W^4+W^2}{2}$.

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction des Würfels

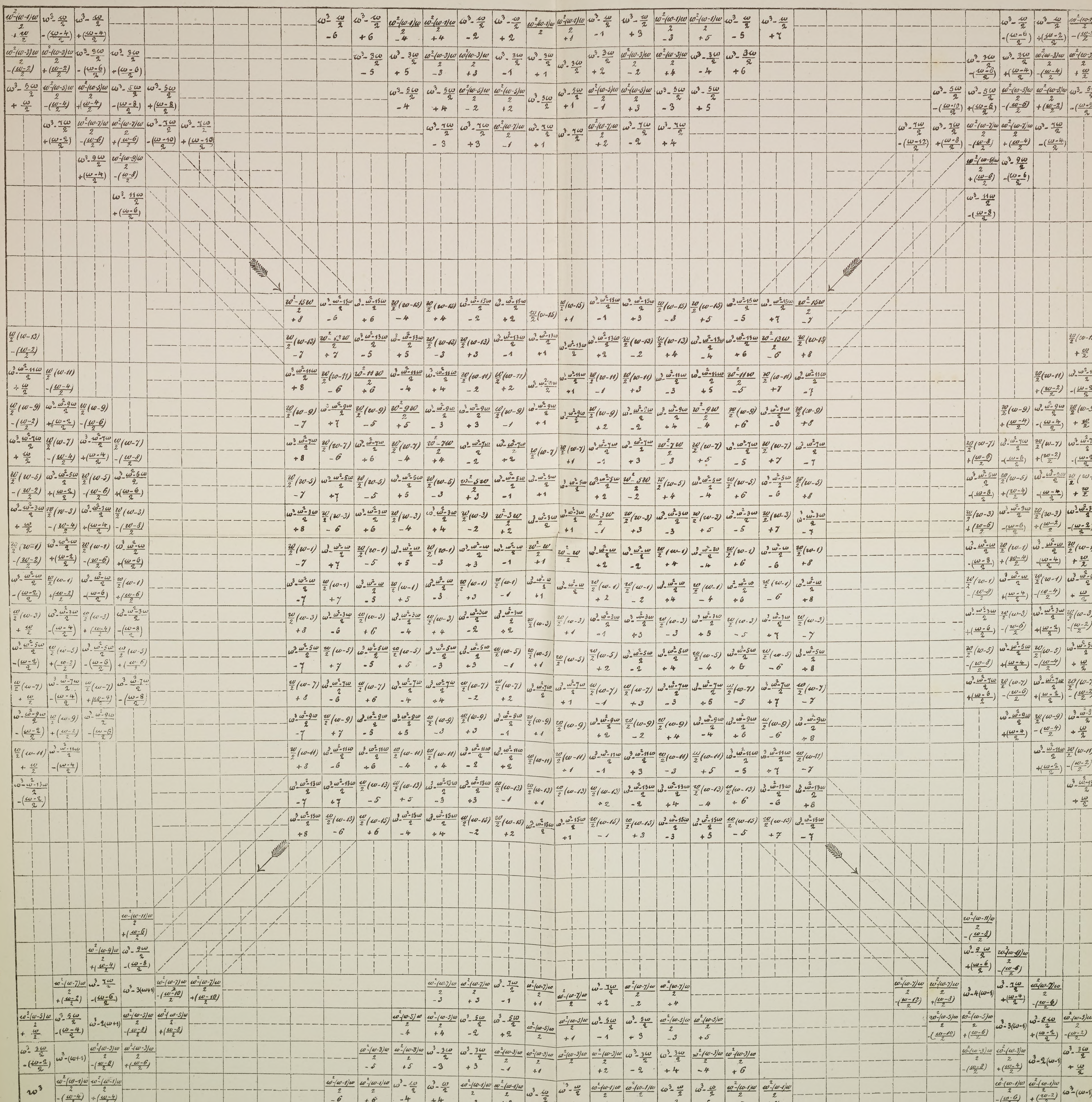
aus den

gerad-geraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 75.



Die Grundzahl bildet die jedesmalige Wurzelgrösse = w.

Die Summe einer Zahlenreihe $= \frac{w^4 + w}{2}$.

Die Summe aller Zahlen eines Tetragrammes $= \frac{w^5 + w^2}{2}$.

Die Summe aller Zahlen des Würfels $= \frac{w^6 + w^3}{2}$.

Algebraischer Schlüssel

zu dem

Wesen und der Construction der Tetragramme

aus den

ungerad-geraden Wurzelgrössen

von

Dr. Franz Liharžik.

№ 74.

$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-0}{2})$	$X+\frac{W}{2}\cdot W-(\frac{W-4}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-4}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}\omega-(\frac{\omega-8}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-8}{2})$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-(r+1)$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+r+1$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-5$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+5$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-3$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+3$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-1$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+1$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+2$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-2$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+4$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-4$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+r$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-r$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+(\frac{\omega-10}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-10}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+(\frac{\omega-6}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-6}{2})$	$X+\frac{W}{2}\cdot W+(\frac{W-2}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$X-(\frac{W-4}{2})W-(\frac{W-2}{2})$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+\frac{\omega-2}{2}$	$X+(\frac{W-2}{2})W-(\frac{W-6}{2})$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+(\frac{\omega-6}{2})$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-10}{2})$				$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-r$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+r$			$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-4$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+4$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-2$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+2$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+1$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-1$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+3$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-3$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+5$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-5$			$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+(r+1)$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-(r+1)$			$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-8}{2})$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-(\frac{\omega-8}{2})$	$X+(\frac{W-2}{2})W+(\frac{W-4}{2})$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$X+(\frac{W-2}{2})W+\frac{W}{2}$
$x+(\frac{\omega-4}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$	$X-(\frac{W-6}{2})W-(\frac{W-4}{2})$																															$X-(\frac{W-6}{2})W+(\frac{W-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-4}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-(\frac{\omega-8}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-6}{2})\omega+(\frac{\omega-2}{2})$																															$x+(\frac{\omega-6}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-(\frac{\omega-8}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+(\frac{\omega-8}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-(\frac{\omega-10}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x-12\omega+13$	$X+13W-11$	$x-12\omega+11$	$x+13\omega-9$	$x-12\omega+9$	$x+13\omega-7$	$x-12\omega+7$	$x+13\omega-5$	$x-12\omega+5$	$x+13\omega-3$	$x-12\omega+3$	$x+13\omega-1$	$x+13\omega$	$x-12\omega+1$	$x+13\omega+2$	$x-12\omega-2$	$x+13\omega+4$	$x-12\omega-4$	$x+13\omega+6$	$x-12\omega-6$	$x+13\omega+8$	$x-12\omega-8$	$x+13\omega+10$	$x-12\omega-10$	$X+13W+12$	$X-12\omega-12$			$x-(\frac{\omega-10}{2})\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-8}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
				$X-11W-12$	$X-11\omega+12$	$X+12W-10$	$x-11\omega+10$	$x+12\omega-8$	$x-11\omega+8$	$x+12\omega-6$	$x-11\omega+6$	$x+12\omega-4$	$x-11\omega+4$	$x+12\omega-2$	$x-11\omega+2$	$x+12\omega+1$	$x+12\omega$	$x-11\omega-1$	$x+12\omega+3$	$x-11\omega-3$	$x+12\omega+5$	$x-11\omega-5$	$x+12\omega+7$	$x-11\omega-7$	$x+12\omega+9$	$x-11\omega-9$	$X+12W+11$	$X-11\omega-11$	$X+12W+13$			$x+(\frac{\omega-10}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-(\frac{\omega-12}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$
				$x+11\omega+13$	$X-10W-11$	$X-10\omega+11$	$X+11W-9$	$x-10\omega+9$	$x+11\omega-7$	$x-10\omega+7$	$x+11\omega-5$	$x-10\omega+5$	$x+11\omega-3$	$x-10\omega+3$	$x+11\omega-1$	$x+11\omega$	$x-10\omega+1$	$x+11\omega+2$	$x-10\omega-2$	$x+11\omega+4$	$x-10\omega-4$	$x+11\omega+6$	$x-10\omega-6$	$x+11\omega+8$	$x-10\omega-8$	$X+11W+10$	$X-10\omega-10$	$X-10W+12$	$x+11\omega-12$				
$x-9\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+10\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-9\omega-12$	$x+10\omega+12$	$X-9W-10$	$X-9\omega+10$	$X+10W-8$	$x-9\omega+8$	$x+10\omega-6$	$x-9\omega+6$	$x+10\omega-4$	$x-9\omega+4$	$x+10\omega-2$	$x-9\omega+2$	$x+10\omega+1$	$x+10\omega$	$x-9\omega-1$	$x+10\omega+3$	$x-9\omega-3$	$x+10\omega+5$	$x-9\omega-5$	$x+10\omega+7$	$x-9\omega-7$	$X+10W+9$	$X-9\omega-9$	$X+10W+11$	$x+10\omega-11$	$x-9\omega+13$				
$x+9\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-8\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+9\omega+13$	$x-8\omega-11$	$x+9\omega+11$	$X-8W-9$	$X-8\omega+9$	$X+9W-7$	$x-8\omega+7$	$x+9\omega-5$	$x-8\omega+5$	$x+9\omega-3$	$x-8\omega+3$	$x+9\omega-1$	$x+9\omega$	$x-8\omega+1$	$x+9\omega+2$	$x-8\omega-2$	$x+9\omega+4$	$x-8\omega-4$	$x+9\omega+6$	$x-8\omega-6$	$X+9W+8$	$X-8\omega-8$	$X-8W+10$	$x+9\omega-10$	$x-8\omega+12$	$x+9\omega-12$			$x-8\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+9\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
				$x-7\omega-12$	$x+8\omega+12$	$x-7\omega-10$	$x+8\omega+10$	$X-7W-8$	$X-7\omega+8$	$X+8W-6$	$x-7\omega+6$	$x+8\omega-4$	$x-7\omega+4$	$x+8\omega-2$	$x-7\omega+2$	$x+8\omega+1$	$x+8\omega$	$x-7\omega-1$	$x+8\omega+3$	$x-7\omega-3$	$x+8\omega+5$	$x-7\omega-5$	$X+8W+7$	$X-7\omega-7$	$X+8W+9$	$x+8\omega-9$	$x-7\omega+11$	$x+8\omega-11$	$x-7\omega+13$			$x+8\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-7\omega+\frac{\omega}{2}$
				$x+7\omega+13$	$x-6\omega-11$	$x+7\omega+11$	$x-6\omega-9$	$x+7\omega+9$	$X-6W-7$	$X-6\omega+7$	$X+7W-5$	$x-6\omega+5$	$x+7\omega-3$	$x-6\omega+3$	$x+7\omega-1$	$x+7\omega$	$x-6\omega+1$	$x+7\omega+2$	$x-6\omega-2$	$x+7\omega+4$	$x-6\omega-4$	$X+7W+6$	$X-6\omega-6$	$X-6W+8$	$x+7\omega-8$	$x-6\omega+10$	$x+7\omega-10$	$x-6\omega+12$	$x+7\omega-12$				
$x-5\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+6\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-5\omega-12$	$x+6\omega+12$	$x-5\omega-10$	$x+6\omega+10$	$x-5\omega-8$	$x+6\omega+8$	$X-5W-6$	$X-5\omega+6$	$X+6W-4$	$x-5\omega+4$	$x+6\omega-2$	$x-5\omega+2$	$x+6\omega+1$	$x+6\omega$	$x-5\omega-1$	$x+6\omega+3$	$x-5\omega-3$	$X+6W+5$	$X-5\omega-5$	$X+6W+7$	$x+6\omega-7$	$x-5\omega+9$	$x+6\omega-9$	$x-5\omega+11$	$x+6\omega-11$	$x-5\omega+13$				
$x+5\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-4\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+5\omega+13$	$x-4\omega-11$	$x+5\omega+11$	$x-4\omega-9$	$x+5\omega+9$	$x-4\omega-7$	$x+5\omega+7$	$X-4W-5$	$X-4\omega+5$	$X+5W-3$	$x-4\omega+3$	$x+5\omega-1$	$x+5\omega$	$x-4\omega+1$	$x+5\omega+2$	$x-4\omega-2$	$X+5W+4$	$X-4\omega-4$	$X-4W+6$	$x+5\omega-6$	$x-4\omega+8$	$x+5\omega-8$	$x-4\omega+10$	$x+5\omega-10$	$x-4\omega+12$	$x+5\omega-12$			$x-4\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+5\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-3\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+4\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-3\omega-12$	$x+4\omega+12$	$x-3\omega-10$	$x+4\omega+10$	$x-3\omega-8$	$x+4\omega+8$	$x-3\omega-6$	$x+4\omega+6$	$X-3W-4$	$X-3\omega+4$	$X+4W-2$	$x-3\omega+2$	$x+4\omega+1$	$x+4\omega$	$x-3\omega-1$	$X+4W+3$	$X-3\omega-3$	$X+4W+5$	$x+4\omega-5$	$x-3\omega+7$	$x+4\omega-7$	$x-3\omega+9$	$x+4\omega-9$	$x-3\omega+11$	$x+4\omega-11$	$x-3\omega+13$			$x+4\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-3\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+3\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-2\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+3\omega+13$	$x-2\omega-11$	$x+3\omega+11$	$x-2\omega-9$	$x+3\omega+9$	$x-2\omega-7$	$x+3\omega+7$	$x-2\omega-5$	$x+3\omega+5$	$X-2W-3$	$X-2\omega+3$	$X+3W-1$	$x-2\omega$	$x+3\omega+1$	$X+3W+2$	$X-2\omega-2$	$X-2W+4$	$x+3\omega-4$	$x-2\omega+6$	$x+3\omega-6$	$x-2\omega+8$	$x+3\omega-8$	$x-2\omega+10$	$x+3\omega-10$	$x-2\omega+12$	$x+3\omega-12$			$x-2\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+3\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+2\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-\omega-12$	$x+2\omega+12$	$x-\omega-10$	$x+2\omega+10$	$x-\omega-8$	$x+2\omega+8$	$x-\omega-6$	$x+2\omega+6$	$x-\omega-4$	$x+2\omega+4$	$X-W-2$	$X-\omega+2$	$X+2W$	$X+2W+1$	$X-\omega-1$	$X+2W+3$	$x+2\omega-3$	$x-\omega+5$	$x+2\omega-5$	$x-\omega+7$	$x+2\omega-7$	$x-\omega+9$	$x+2\omega-9$	$x-\omega+11$	$x+2\omega-11$	$x-\omega+13$			$x+2\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+\omega+13$	$x-11$	$x+\omega+11$	$x-9$	$x+\omega+9$	$x-7$	$x+\omega+7$	$x-5$	$x+\omega+5$	$x-3$	$x+\omega+3$	$X-1$	$x+1$	x	$X+W+2$	$x+\omega-2$	$x+4$	$x+\omega-4$	$x+6$	$x+\omega-6$	$x+8$	$x+\omega-8$	$x+10$	$x+\omega-10$	$x+12$	$x+\omega-12$			$x+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-12$	$x+\omega+12$	$x-10$	$x+\omega+10$	$x-8$	$x+\omega+8$	$x-6$	$x+\omega+6$	$x-4$	$x+\omega+4$	$x-2$	$X+W-1$	$x+\omega+1$	$x+\omega$	$X+2$	$x+3$	$x+\omega-3$	$x+5$	$x+\omega-5$	$x+7$	$x+\omega-7$	$x+9$	$x+\omega-9$	$x+11$	$x+\omega-11$	$x+13$			$x+\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}$
$x+2\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+2\omega+13$	$x-\omega-11$	$x+2\omega+11$	$x-\omega-9$	$x+2\omega+9$	$x-\omega-7$	$x+2\omega+7$	$x-\omega-5$	$x+2\omega+5$	$x-\omega-3$	$X+2W-2$	$X+2\omega+2$	$X-W+1$	$X-W$	$x+2\omega-1$	$X-W+3$	$x-\omega+4$	$x+2\omega-4$	$x-\omega+6$	$x+2\omega-6$	$x-\omega+8$	$x+2\omega-8$	$x-\omega+10$	$x+2\omega-10$	$x-\omega+12$	$x+2\omega-12$			$x-\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+2\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-2\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+3\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-2\omega-12$	$x+3\omega+12$	$x-2\omega-10$	$x+3\omega+10$	$x-2\omega-8$	$x+3\omega+8$	$x-2\omega-6$	$x+3\omega+6$	$x-2\omega-4$	$X+3W-3$	$X+3\omega+3$	$X-2W+2$	$x+3\omega$	$x-2\omega+1$	$X-2W-1$	$X+3\omega-2$	$X+3W+4$	$x-2\omega+5$	$x+3\omega-5$	$x-2\omega+7$	$x+3\omega-7$	$x-2\omega+9$	$x+3\omega-9$	$x-2\omega+11$	$x+3\omega-11$	$x-2\omega+13$			$x+3\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-2\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+4\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-3\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+4\omega+13$	$x-3\omega-11$	$x+4\omega+11$	$x-3\omega-9$	$x+4\omega+9$	$x-3\omega-7$	$x+4\omega+7$	$x-3\omega-5$	$X+4W-4$	$X+4\omega+4$	$X-3W+3$	$x+4\omega-1$	$x-3\omega+1$	$x-3\omega$	$x+4\omega+2$	$X-3W-2$	$X+4\omega-3$	$X-3W+5$	$x-3\omega+6$	$x+4\omega-6$	$x-3\omega+8$	$x+4\omega-8$	$x-3\omega+10$	$x+4\omega-10$	$x-3\omega+12$	$x+4\omega-12$			$x-3\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+4\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-4\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+5\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-4\omega-12$	$x+5\omega+12$	$x-4\omega-10$	$x+5\omega+10$	$x-4\omega-8$	$x+5\omega+8$	$x-4\omega-6$	$X+5W-5$	$X+5\omega+5$	$X-4W+4$	$x+5\omega-2$	$x-4\omega+2$	$x-4\omega$	$x+5\omega+1$	$x-4\omega-1$	$x+5\omega+3$	$X-4W-3$	$X+5\omega-4$	$X+5W+6$	$x-4\omega+7$	$x+5\omega-7$	$x-4\omega+9$	$x+5\omega-9$	$x-4\omega+11$	$x+5\omega-11$	$x-4\omega+13$			$x+5\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-4\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+6\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-5\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+6\omega+13$	$x-5\omega-11$	$x+6\omega+11$	$x-5\omega-9$	$x+6\omega+9$	$x-5\omega-7$	$X+6W-6$	$x+6\omega+6$	$X-5W+5$	$x+6\omega-3$	$x-5\omega+3$	$x+6\omega-1$	$x-5\omega+1$	$x-5\omega$	$x+6\omega+2$	$x-5\omega-2$	$x+6\omega+4$	$X-5W-4$	$x+6\omega-5$	$X-5W+7$	$x-5\omega+8$	$x+6\omega-8$	$x-5\omega+10$	$x+6\omega-10$	$x-5\omega+12$	$x+6\omega-12$				
$x-6\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+7\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x-6\omega-12$	$x+7\omega+12$	$x-6\omega-10$	$x+7\omega+10$	$x-6\omega-8$	$X+7W-7$	$x+7\omega+7$	$X-6W+6$	$x+7\omega-4$	$x-6\omega+4$	$x+7\omega-2$	$x-6\omega+2$	$x-6\omega$	$x+7\omega+1$	$x-6\omega-1$	$x+7\omega+3$	$x-6\omega-3$	$x+7\omega+5$	$X-6W-5$	$x+7\omega-6$	$X+7W+8$	$x-6\omega+9$	$x+7\omega-9$	$x-6\omega+11$	$x+7\omega-11$	$x-6\omega+13$				
				$x+8\omega+13$	$x-7\omega-11$	$x+8\omega+11$	$x-7\omega-9$	$X+8W-8$	$x+8\omega+8$	$X-7W+7$	$x+8\omega-5$	$x-7\omega+5$	$x+8\omega-3$	$x-7\omega+3$	$x+8\omega-1$	$x-7\omega+1$	$x-7\omega$	$x+8\omega+2$	$x-7\omega-2$	$x+8\omega+4$	$x-7\omega-4$	$x+8\omega+6$	$X-7W-6$	$x+8\omega-7$	$X-7W+9$	$x-7\omega+10$	$x+8\omega-10$	$x-7\omega+12$	$x+8\omega-12$			$x-7\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+8\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
				$x-8\omega-12$	$x+9\omega+12$	$x-8\omega-10$	$X+9W-9$	$x+9\omega+9$	$X-8W+8$	$x+9\omega-6$	$x-8\omega+6$	$x+9\omega-4$	$x-8\omega+4$	$x+9\omega-2$	$x-8\omega+2$	$x-8\omega$	$x+9\omega+1$	$x-8\omega-1$	$x+9\omega+3$	$x-8\omega-3$	$x+9\omega+5$	$x-8\omega-5$	$x+9\omega+7$	$X-8W-7$	$x+9\omega-8$	$X+9W+10$	$x-8\omega+11$	$x+9\omega-11$	$x-8\omega+13$			$x+9\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-8\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+10\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-9\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$x+10\omega+13$	$x-9\omega-11$	$X+10W-10$	$X+10\omega+10$	$X-9W+9$	$x+10\omega-7$	$x-9\omega+7$	$x+10\omega-5$	$x-9\omega+5$	$x+10\omega-3$	$x-9\omega+3$	$x+10\omega-1$	$x-9\omega+1$	$x-9\omega$	$x+10\omega+2$	$x-9\omega-2$	$x+10\omega+4$	$x-9\omega-4$	$x+10\omega+6$	$x-9\omega-6$	$x+10\omega+8$	$X-9W-8$	$X+10\omega-9$	$X-9W+11$	$x-9\omega+12$	$x+10\omega-12$				
				$x-10\omega-12$	$X+11W-11$	$X+11\omega+11$	$X-10W+10$	$x+11\omega-8$	$x-10\omega+8$	$x+11\omega-6$	$x-10\omega+6$	$x+11\omega-4$	$x-10\omega+4$	$x+11\omega-2$	$x-10\omega+2$	$x-10\omega$	$x+11\omega+1$	$x-10\omega-1$	$x+11\omega+3$	$x-10\omega-3$	$x+11\omega+5$	$x-10\omega-5$	$x+11\omega+7$	$x-10\omega-7$	$x+11\omega+9$	$X-10W-9$	$x+11\omega-10$	$X+11W+12$	$x-10\omega+13$				
$x+(\frac{\omega-10}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-(\frac{\omega-12}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$			$X+12W-12$	$X+12\omega+12$	$X-11W+11$	$x+12\omega-9$	$x-11\omega+9$	$x+12\omega-7$	$x-11\omega+7$	$x+12\omega-5$	$x-11\omega+5$	$x+12\omega-3$	$x-11\omega+3$	$x+12\omega-1$	$x-11\omega+1$	$x-11\omega$	$x+12\omega+2$	$x-11\omega-2$	$x+12\omega+4$	$x-11\omega-4$	$x+12\omega+6$	$x-11\omega-6$	$x+12\omega+8$	$x-11\omega-8$	$x+12\omega+10$	$X-11W-10$	$x+12\omega-11$	$X-11W+13$			$x-(\frac{\omega-12}{2})\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-10}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-(\frac{\omega-10}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-8}{2})\omega+(\frac{\omega-2}{2})$			$x+13\omega+13$	$X-12W+12$	$x+13\omega-10$	$x-12\omega+10$	$x+13\omega-8$	$x-12\omega+8$	$x+13\omega-6$	$x-12\omega+6$	$x+13\omega-4$	$x-12\omega+4$	$x+13\omega-2$	$x-12\omega+2$	$x-12\omega$	$x+13\omega+1$	$x-12\omega-1$	$x+13\omega+3$	$x-12\omega-3$	$x+13\omega+5$	$x-12\omega-5$	$x+13\omega+7$	$x-12\omega-7$	$x+13\omega+9$	$x-12\omega-9$	$x+13\omega+11$	$X-12W+11$	$x+13\omega-12$			$x+(\frac{\omega-8}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$x-(\frac{\omega-10}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$
$x+(\frac{\omega-6}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$	$x-(\frac{\omega-8}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$																															$x-(\frac{\omega-8}{2})\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-6}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$
$x-(\frac{\omega-6}{2})\omega-(\frac{\omega-2}{2})$	$X+(\frac{W-4}{2})W-(\frac{W-4}{2})$																															$X+(\frac{W-4}{2})W+(\frac{W-2}{2})$	$x-(\frac{\omega-6}{2})\omega+\frac{\omega}{2}$
$X+(\frac{W-2}{2})W-(\frac{W-2}{2})$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-2}{2})$	$X-(\frac{W-4}{2})W+(\frac{W-4}{2})$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-8}{2})$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+(\frac{\omega-8}{2})$			$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-(r+1)$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+(r+1)$			$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-5$	$x-(\frac{\omega+4}{2})\omega+5$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-3$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+3$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-1$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega+1$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+2$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-2$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+4$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-4$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+6$		$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+r$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-r$			$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-10}{2})$	$x-(\frac{\omega-4}{2})\omega-(\frac{\omega-10}{2})$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-6}{2})$	$X-(\frac{W-4}{2})W-(\frac{W-6}{2})$	$x+(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-4}{2})$	$X-(\frac{W-4}{2})W+\frac{W}{2}$
$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+\frac{\omega}{2}$	$X-(\frac{W-2}{2})W+(\frac{W-2}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-(\frac{\omega-6}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-6}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}\omega-(\frac{\omega-10}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+(\frac{\omega-10}{2})$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-r$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+r$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-4$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+4$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-2$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega+2$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+1$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-1$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+3$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-3$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+5$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-5$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+(r+1)$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-(r+1)$			$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+(\frac{\omega-8}{2})$	$x-(\frac{\omega-2}{2})\omega-(\frac{\omega-8}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega+(\frac{\omega-4}{2})$	$X-(\frac{W-2}{2})W-(\frac{W-4}{2})$	$x+\frac{\omega}{2}\cdot\omega-(\frac{\omega-2}{2})$

Die Leitzahl $x=\frac{w(w-1)}{2}$.

Die gleiche Summe $=\frac{w^3+w}{2}$.

Die Totalsumme aller Zahlen des Tetragrammes $=\frac{w^4+w^2}{2}$.

Reihenfolge der Kreise

und

Längenbestimmung der Radien der Quadrate

aus

ungerader Wurzel.

№ 76.

91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	90
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	77	89
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	65	76	88
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37	38	39	40	41	42	43	44	45	54	64	75	87
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29	30	31	32	33	34	35	36	44	53	63	74	86
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22	23	24	25	26	27	28	35	43	52	62	73	85
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16	17	18	19	20	21	27	34	42	51	61	72	84
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11	12	13	14	15	20	26	33	41	50	60	71	83
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7	8	9	10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4	5	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
79	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1 0	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2 1	3 $\sqrt{2}$	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4 2	5 $\sqrt{5}$	6 $\sqrt{8}$	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7 3	8 $\sqrt{10}$	9 $\sqrt{13}$	10 $\sqrt{18}$	14	19	25	32	40	49	59	70	82
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11 4	12 $\sqrt{17}$	13 $\sqrt{20}$	14 $\sqrt{25}$+	15 $\sqrt{32}$	20	26	33	41	50	60	71	83
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16 5+	17 $\sqrt{26}$	18 $\sqrt{29}$	19 $\sqrt{34}$	20 $\sqrt{41}$	21 $\sqrt{50}$+	27	34	42	51	61	72	84
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22 6	23 $\sqrt{37}$	24 $\sqrt{40}$	25 $\sqrt{45}$	26 $\sqrt{52}$	27 $\sqrt{61}$	28 $\sqrt{72}$	35	43	52	62	73	85
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29 7	30 $\sqrt{50}$+	31 $\sqrt{53}$	32 $\sqrt{58}$	33 $\sqrt{65}$+	34 $\sqrt{74}$	35 $\sqrt{85}$+	36 $\sqrt{98}$	44	53	63	74	86
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37 8	38 $\sqrt{65}$+	39 $\sqrt{68}$	40 $\sqrt{73}$	41 $\sqrt{80}$	42 $\sqrt{89}$	43 $\sqrt{100}$	44 $\sqrt{113}$	45 $\sqrt{128}$	54	64	75	87
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46 9	47 $\sqrt{82}$	48 $\sqrt{85}$+	49 $\sqrt{90}$	50 $\sqrt{97}$	51 $\sqrt{106}$	52 $\sqrt{117}$	53 $\sqrt{130}$+	54 $\sqrt{145}$+	55 $\sqrt{162}$	65	76	88
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56 10+	57 $\sqrt{101}$	58 $\sqrt{104}$	59 $\sqrt{109}$	60 $\sqrt{116}$	61 $\sqrt{125}$+	62 $\sqrt{136}$	63 $\sqrt{149}$	64 $\sqrt{164}$	65 $\sqrt{181}$	66 $\sqrt{200}$	77	89
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67 11	68 $\sqrt{122}$	69 $\sqrt{125}$+	70 $\sqrt{130}$+	71 $\sqrt{137}$	72 $\sqrt{146}$	73 $\sqrt{157}$	74 $\sqrt{170}$	75 $\sqrt{185}$	76 $\sqrt{202}$	77 $\sqrt{221}$	78 $\sqrt{242}$	90
91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79 12	80 $\sqrt{145}$+	81 $\sqrt{148}$	82 $\sqrt{153}$	83 $\sqrt{160}$	84 $\sqrt{169}$	85 $\sqrt{180}$	86 $\sqrt{193}$	87 $\sqrt{208}$	88 $\sqrt{225}$	89 $\sqrt{244}$	90 $\sqrt{265}$	91 $\sqrt{288}$

Reihenfolge der Kreise

und

Längenbestimmung der Radien der Quadrate

aus

gerader Wurzel.

№ 77.

91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	90
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	77	89
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	65	76	88
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37	37	38	39	40	41	42	43	44	45	54	64	75	87
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29	29	30	31	32	33	34	35	36	44	53	63	74	86
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22	22	23	24	25	26	27	28	35	43	52	62	73	85
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16	16	17	18	19	20	21	27	34	42	51	61	72	84
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11	11	12	13	14	15	20	26	33	41	50	60	71	83
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7	7	8	9	10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4	4	5	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2	2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
79	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
79	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1	1 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2	2 $\frac{1}{2}\sqrt{10}$	3 $\frac{1}{2}\sqrt{18}$	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4	4 $\frac{1}{2}\sqrt{26}$	5 $\frac{1}{2}\sqrt{34}$	6 $\frac{1}{2}\sqrt{50}$	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7	7 $\frac{1}{2}\sqrt{50}$	8 $\frac{1}{2}\sqrt{58}$	9 $\frac{1}{2}\sqrt{74}$	10 $\frac{1}{2}\sqrt{98}$	14	19	25	32	40	49	59	70	82
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11	11 $\frac{1}{2}\sqrt{82}$	12 $\frac{1}{2}\sqrt{90}$	13 $\frac{1}{2}\sqrt{106}$	14 $\frac{1}{2}\sqrt{130}$	15 $\frac{1}{2}\sqrt{162}$	20	26	33	41	50	60	71	83
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16	16 $\frac{1}{2}\sqrt{122}$	17 $\frac{1}{2}\sqrt{130}$	18 $\frac{1}{2}\sqrt{146}$	19 $\frac{1}{2}\sqrt{170}$	20 $\frac{1}{2}\sqrt{202}$	21 $\frac{1}{2}\sqrt{242}$	27	34	42	51	61	72	84
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22	22 $\frac{1}{2}\sqrt{170}$	23 $\frac{1}{2}\sqrt{178}$	24 $\frac{1}{2}\sqrt{194}$	25 $\frac{1}{2}\sqrt{218}$	26 $\frac{1}{2}\sqrt{250}$	27 $\frac{1}{2}\sqrt{290}$	28 $\frac{1}{2}\sqrt{338}$	35	43	52	62	73	85
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29	29 $\frac{1}{2}\sqrt{226}$	30 $\frac{1}{2}\sqrt{234}$	31 $\frac{1}{2}\sqrt{250}$	32 $\frac{1}{2}\sqrt{274}$	33 $\frac{1}{2}\sqrt{306}$	34 $\frac{1}{2}\sqrt{346}$	35 $\frac{1}{2}\sqrt{394}$	36 $\frac{1}{2}\sqrt{450}$	44	53	63	74	86
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37	37 $\frac{1}{2}\sqrt{290}$	38 $\frac{1}{2}\sqrt{298}$	39 $\frac{1}{2}\sqrt{314}$	40 $\frac{1}{2}\sqrt{338}$	41 $\frac{1}{2}\sqrt{370}$	42 $\frac{1}{2}\sqrt{410}$	43 $\frac{1}{2}\sqrt{458}$	44 $\frac{1}{2}\sqrt{514}$	45 $\frac{1}{2}\sqrt{578}$	54	64	75	87
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	46 $\frac{1}{2}\sqrt{362}$	47 $\frac{1}{2}\sqrt{370}$	48 $\frac{1}{2}\sqrt{386}$	49 $\frac{1}{2}\sqrt{410}$	50 $\frac{1}{2}\sqrt{442}$	51 $\frac{1}{2}\sqrt{482}$	52 $\frac{1}{2}\sqrt{530}$	53 $\frac{1}{2}\sqrt{586}$	54 $\frac{1}{2}\sqrt{650}$	55 $\frac{1}{2}\sqrt{722}$	65	76	88
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	56 $\frac{1}{2}\sqrt{442}$	57 $\frac{1}{2}\sqrt{450}$	58 $\frac{1}{2}\sqrt{466}$	59 $\frac{1}{2}\sqrt{490}$	60 $\frac{1}{2}\sqrt{522}$	61 $\frac{1}{2}\sqrt{562}$	62 $\frac{1}{2}\sqrt{610}$	63 $\frac{1}{2}\sqrt{666}$	64 $\frac{1}{2}\sqrt{730}$	65 $\frac{1}{2}\sqrt{802}$	66 $\frac{1}{2}\sqrt{882}$	77	89
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	67 $\frac{1}{2}\sqrt{530}$	68 $\frac{1}{2}\sqrt{538}$	69 $\frac{1}{2}\sqrt{554}$	70 $\frac{1}{2}\sqrt{578}$	71 $\frac{1}{2}\sqrt{610}$	72 $\frac{1}{2}\sqrt{650}$	73 $\frac{1}{2}\sqrt{698}$	74 $\frac{1}{2}\sqrt{754}$	75 $\frac{1}{2}\sqrt{818}$	76 $\frac{1}{2}\sqrt{890}$	77 $\frac{1}{2}\sqrt{970}$	78 $\frac{1}{2}\sqrt{1058}$	90
91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	79 $\frac{1}{2}\sqrt{626}$	80 $\frac{1}{2}\sqrt{634}$	81 $\frac{1}{2}\sqrt{650}$	82 $\frac{1}{2}\sqrt{674}$	83 $\frac{1}{2}\sqrt{706}$	84 $\frac{1}{2}\sqrt{746}$	85 $\frac{1}{2}\sqrt{794}$	86 $\frac{1}{2}\sqrt{850}$	87 $\frac{1}{2}\sqrt{914}$	88 $\frac{1}{2}\sqrt{986}$	89 $\frac{1}{2}\sqrt{1067}$	90 $\frac{1}{2}\sqrt{1154}$	91 $\frac{1}{2}\sqrt{1250}$

Das Gesetz des menschlichen Wachsthumes

von

Dr. Franz Liharžik.

Maasseinheit = Ein Centimètre.

Männliches Geschlecht.

№ 78.

Die Epochen	Ende der Epochen in Monaten	Länge des			Entfernung des Schwertknorpels von der Schoossfuge	Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels	Von der Sohle zum Mittelpunkte des innern Knöchels	Vom Scheitel zur Schoossfuge	Von der Schoossfuge zur Sohle	Länge des ganzen Körpers	Bei wagrecht ausgestreckter Extremität Länge				Die halbe Körperlänge	Die halbe Schulterbreite = der halben Hüftenbreite	Querer Kopfdurchmesser	Der gerade Kopfdurchmesser	Die grösste Kopfperipherie	Die Brustperipherie	Der gerade Brustdurchmesser = dem geraden Beckendurchmesser
		Halses	Kopfes	Brustbeines							der Hand = Länge des Schlüsselbeines	des Vorderarmes	des Oberarmes	von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmbeins							
Der Neugeborene		1	12	7	5+5	18	2	30	20	50	6	7	9	3	25	5	10	12	36	36	10
1	1	$1\frac{8}{12}$	13	8	$5\frac{6}{12}+5\frac{6}{12}$	21	$2\frac{2}{12}$	$33\frac{8}{12}$	$23\frac{2}{12}$	$56\frac{10}{12}$	$6\frac{19}{24}$	$7\frac{23}{24}$	$10\frac{3}{12}$	$3\frac{5}{12}$	$28\frac{5}{12}$	$5\frac{95}{144}$	$10\frac{7}{12}$	$12\frac{8}{12}$	$38\frac{4}{12}$	39	11
2	3	$2\frac{4}{12}$	14	9	6+6	24	$2\frac{4}{12}$	$37\frac{4}{12}$	$26\frac{4}{12}$	$63\frac{8}{12}$	$7\frac{14}{24}$	$8\frac{22}{24}$	$11\frac{6}{12}$	$3\frac{10}{12}$	$31\frac{10}{12}$	$6\frac{46}{144}$	$11\frac{2}{12}$	$13\frac{4}{12}$	$40\frac{8}{12}$	42	12
3	6	3	15	10	$6\frac{6}{12}+6\frac{6}{12}$	27	$2\frac{6}{12}$	41	$29\frac{6}{12}$	$70\frac{6}{12}$	$8\frac{9}{24}$	$9\frac{21}{24}$	$12\frac{9}{12}$	$4\frac{3}{12}$	$35\frac{3}{12}$	$6\frac{141}{144}$	$11\frac{9}{12}$	14	43	45	13
4	10	$3\frac{8}{12}$	16	11	7+7	30	$2\frac{5}{12}$	$44\frac{8}{12}$	$32\frac{8}{12}$	$77\frac{4}{12}$	$9\frac{4}{24}$	$10\frac{20}{24}$	14	$4\frac{8}{12}$	$38\frac{8}{12}$	$7\frac{92}{144}$	$12\frac{4}{12}$	$14\frac{8}{12}$	$45\frac{4}{12}$	48	14
5	15	$4\frac{4}{12}$	17	12	$7\frac{6}{12}+7\frac{6}{12}$	33	$2\frac{10}{12}$	$48\frac{4}{12}$	$35\frac{10}{12}$	$84\frac{2}{12}$	$9\frac{23}{24}$	$11\frac{19}{24}$	$15\frac{3}{12}$	$5\frac{1}{12}$	$42\frac{1}{12}$	$8\frac{43}{144}$	$12\frac{11}{12}$	$15\frac{4}{12}$	$47\frac{8}{12}$	51	15
6	21	5	18	13	8+8	36	3	52	39	91	$10\frac{18}{24}$	$12\frac{18}{24}$	$16\frac{6}{12}$	$5\frac{6}{12}$	$45\frac{6}{12}$	$8\frac{23}{24}$	$13\frac{6}{12}$	16	50	54	16
7	28	$5\frac{2}{12}$	$18\frac{5}{12}$	$13\frac{8}{12}$	$8\frac{4}{12}+8\frac{4}{12}$	$39\frac{10}{12}$	$3\frac{3}{12}$	$53\frac{11}{12}$	$43\frac{1}{12}$	97	$11\frac{23}{48}$	$13\frac{27}{48}$	$17\frac{7}{12}$	$5\frac{21}{24}$	$48\frac{6}{12}$	$9\frac{163}{288}$	$13\frac{9}{12}$	$16\frac{3}{12}$	$50\frac{4}{12}$	56	$16\frac{5}{12}$
8	36	$5\frac{4}{12}$	$18\frac{10}{12}$	$14\frac{4}{12}$	$8\frac{8}{12}+8\frac{8}{12}$	$43\frac{8}{12}$	$3\frac{6}{12}$	$55\frac{10}{12}$	$47\frac{2}{12}$	103	$12\frac{10}{48}$	$14\frac{18}{48}$	$18\frac{8}{12}$	$6\frac{5}{24}$	$51\frac{6}{12}$	$10\frac{50}{288}$	14	$16\frac{6}{12}$	$50\frac{8}{12}$	58	$16\frac{10}{12}$
9	45	$5\frac{6}{12}$	$19\frac{3}{12}$	15	9+9	$47\frac{6}{12}$	$3\frac{9}{12}$	$57\frac{9}{12}$	$51\frac{3}{12}$	109	$12\frac{45}{48}$	$15\frac{9}{48}$	$19\frac{9}{12}$	$6\frac{15}{24}$	$54\frac{6}{12}$	$10\frac{225}{288}$	$14\frac{3}{12}$	$16\frac{9}{12}$	51	60	$17\frac{3}{12}$
10	55	$5\frac{8}{12}$	$19\frac{8}{12}$	$15\frac{8}{12}$	$9\frac{4}{12}+9\frac{4}{12}$	$51\frac{4}{12}$	4	$59\frac{8}{12}$	$55\frac{4}{12}$	115	$13\frac{32}{48}$	16	$20\frac{10}{12}$	7	$57\frac{6}{12}$	$11\frac{112}{288}$	$14\frac{6}{12}$	17	$51\frac{4}{12}$	62	$17\frac{8}{12}$
11	66	$5\frac{10}{12}$	$20\frac{1}{12}$	$16\frac{4}{12}$	$9\frac{8}{12}+9\frac{8}{12}$	$55\frac{2}{12}$	$4\frac{3}{12}$	$61\frac{7}{12}$	$59\frac{5}{12}$	121	$14\frac{19}{48}$	$16\frac{39}{48}$	$21\frac{11}{12}$	$7\frac{9}{24}$	$60\frac{6}{12}$	$11\frac{287}{288}$	$14\frac{9}{12}$	$17\frac{3}{12}$	$51\frac{8}{12}$	64	$18\frac{1}{12}$
12	78	6	$20\frac{6}{12}$	17	10+10	59	$4\frac{6}{12}$	$63\frac{6}{12}$	$63\frac{6}{12}$	127	$15\frac{6}{48}$	$17\frac{30}{48}$	23	$7\frac{18}{24}$	$63\frac{6}{12}$	$12\frac{174}{288}$	15	$17\frac{6}{12}$	52	66	$18\frac{6}{12}$
13	91	$6\frac{2}{12}$	$20\frac{11}{12}$	$17\frac{8}{12}$	$10\frac{4}{12}+10\frac{4}{12}$	$62\frac{10}{12}$	$4\frac{9}{12}$	$65\frac{5}{12}$	$67\frac{7}{12}$	133	$15\frac{41}{48}$	$18\frac{21}{48}$	$24\frac{1}{12}$	$8\frac{3}{24}$	$66\frac{6}{12}$	$13\frac{61}{288}$	$15\frac{3}{12}$	$17\frac{9}{12}$	$52\frac{4}{12}$	68	$18\frac{11}{12}$
14	105	$6\frac{4}{12}$	$21\frac{4}{12}$	$18\frac{4}{12}$	$10\frac{8}{12}+10\frac{8}{12}$	$66\frac{8}{12}$	5	$67\frac{4}{12}$	$71\frac{8}{12}$	139	$16\frac{28}{48}$	$19\frac{12}{48}$	$25\frac{2}{12}$	$8\frac{12}{24}$	$69\frac{6}{12}$	$13\frac{230}{288}$	$15\frac{6}{12}$	18	$52\frac{8}{12}$	70	$19\frac{4}{12}$
15	120	$6\frac{6}{12}$	$21\frac{9}{12}$	19	11+11	$70\frac{6}{12}$	$5\frac{3}{12}$	$69\frac{3}{12}$	$75\frac{9}{12}$	145	$17\frac{15}{48}$	$20\frac{3}{48}$	$26\frac{3}{12}$	$8\frac{21}{24}$	$72\frac{6}{12}$	$14\frac{123}{288}$	$15\frac{9}{12}$	$18\frac{3}{12}$	53	72	$19\frac{9}{12}$
16	136	$6\frac{8}{12}$	$22\frac{2}{12}$	$19\frac{8}{12}$	$11\frac{4}{12}+11\frac{4}{12}$	$74\frac{4}{12}$	$5\frac{6}{12}$	$71\frac{2}{12}$	$79\frac{10}{12}$	151	$18\frac{2}{48}$	$20\frac{42}{48}$	$27\frac{4}{12}$	$9\frac{6}{24}$	$75\frac{6}{12}$	$15\frac{10}{288}$	16	$18\frac{6}{12}$	$53\frac{4}{12}$	74	$20\frac{2}{12}$
17	153	$6\frac{10}{12}$	$22\frac{7}{12}$	$20\frac{4}{12}$	$11\frac{8}{12}+11\frac{8}{12}$	$78\frac{7}{12}$	$5\frac{9}{12}$	$73\frac{1}{12}$	$83\frac{11}{12}$	157	$18\frac{37}{48}$	$21\frac{33}{48}$	$28\frac{5}{12}$	$9\frac{15}{24}$	$78\frac{6}{12}$	$15\frac{185}{288}$	$16\frac{3}{12}$	$18\frac{9}{12}$	$53\frac{8}{12}$	76	$20\frac{7}{12}$
18	171	7	23	21	12+12	82	6	75	88	163	$19\frac{24}{48}$	$22\frac{24}{48}$	$29\frac{6}{12}$	10	$81\frac{6}{12}$	$16\frac{18}{72}$	$16\frac{6}{12}$	19	54	78	21
19	190	$7\frac{4}{12}$	$23\frac{2}{12}$	$21\frac{2}{12}$	$12\frac{2}{12}+12\frac{2}{12}$	$82\frac{6}{12}$	$6\frac{6}{12}$	76	89	165	$19\frac{9}{12}$	$22\frac{10}{12}$	$29\frac{10}{12}$	$10\frac{1}{12}$	$82\frac{6}{12}$	$16\frac{33}{72}$	$16\frac{8}{12}$	$19\frac{4}{12}$	$54\frac{6}{12}$	$81\frac{6}{12}$	$21\frac{6}{12}$
20	210	$7\frac{8}{12}$	$23\frac{4}{12}$	$21\frac{4}{12}$	$12\frac{4}{12}+12\frac{4}{12}$	83	7	77	90	167	20	$23\frac{2}{12}$	$30\frac{2}{12}$	$10\frac{2}{12}$	$83\frac{6}{12}$	$16\frac{48}{72}$	$16\frac{10}{12}$	$19\frac{8}{12}$	55	85	22
21	231	8	$23\frac{6}{12}$	$21\frac{6}{12}$	$12\frac{6}{12}+12\frac{6}{12}$	$83\frac{6}{12}$	$7\frac{6}{12}$	78	91	169	$20\frac{3}{12}$	$23\frac{6}{12}$	$30\frac{6}{12}$	$10\frac{3}{12}$	$84\frac{6}{12}$	$16\frac{63}{72}$	17	20	$55\frac{6}{12}$	$88\frac{6}{12}$	$22\frac{6}{12}$
22	253	$8\frac{4}{12}$	$23\frac{8}{12}$	$21\frac{8}{12}$	$12\frac{8}{12}+12\frac{8}{12}$	84	8	79	92	171	$20\frac{6}{12}$	$23\frac{10}{12}$	$30\frac{10}{12}$	$10\frac{4}{12}$	$85\frac{6}{12}$	$17\frac{6}{72}$	$17\frac{2}{12}$	$20\frac{4}{12}$	56	92	23
23	276	$8\frac{8}{12}$	$23\frac{10}{12}$	$21\frac{10}{12}$	$12\frac{10}{12}+12\frac{10}{12}$	$84\frac{6}{12}$	$8\frac{6}{12}$	80	93	173	$20\frac{9}{12}$	$24\frac{2}{12}$	$31\frac{2}{12}$	$10\frac{5}{12}$	$86\frac{6}{12}$	$17\frac{21}{72}$	$17\frac{4}{12}$	$20\frac{8}{12}$	$56\frac{6}{12}$	$95\frac{6}{12}$	$23\frac{6}{12}$
24	300	9	24	22	13+13	85	9	81	94	175	21	$24\frac{6}{12}$	$31\frac{6}{12}$	$10\frac{6}{12}$	$87\frac{6}{12}$	$17\frac{36}{72}$	$17\frac{6}{12}$	21	57	99	24

Reihenfolge der Kreise

und

Längenbestimmung der Radien der Quadrate

aus

gerader Wurzel.

№ 77.

91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	90
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	77	89
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	65	76	88
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37	37	38	39	40	41	42	43	44	45	54	64	75	87
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29	29	30	31	32	33	34	35	36	44	53	63	74	86
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22	22	23	24	25	26	27	28	35	43	52	62	73	85
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16	16	17	18	19	20	21	27	34	42	51	61	72	84
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11	11	12	13	14	15	20	26	33	41	50	60	71	83
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7	7	8	9	10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4	4	5	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2	2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
79	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
79	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1	1 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2	2 $\frac{1}{2}\sqrt{10}$	3 $\frac{1}{2}\sqrt{18}$	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4	4 $\frac{1}{2}\sqrt{26}$	5 $\frac{1}{2}\sqrt{34}$	6 $\frac{1}{2}\sqrt{50}$	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7	7 $\frac{1}{2}\sqrt{50}$	8 $\frac{1}{2}\sqrt{58}$	9 $\frac{1}{2}\sqrt{74}$	10 $\frac{1}{2}\sqrt{98}$	14	19	25	32	40	49	59	70	82
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11	11 $\frac{1}{2}\sqrt{82}$	12 $\frac{1}{2}\sqrt{90}$	13 $\frac{1}{2}\sqrt{106}$	14 $\frac{1}{2}\sqrt{130}$	15 $\frac{1}{2}\sqrt{162}$	20	26	33	41	50	60	71	83
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16	16 $\frac{1}{2}\sqrt{122}$	17 $\frac{1}{2}\sqrt{130}$	18 $\frac{1}{2}\sqrt{146}$	19 $\frac{1}{2}\sqrt{170}$	20 $\frac{1}{2}\sqrt{202}$	21 $\frac{1}{2}\sqrt{242}$	27	34	42	51	61	72	84
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22	22 $\frac{1}{2}\sqrt{170}$	23 $\frac{1}{2}\sqrt{178}$	24 $\frac{1}{2}\sqrt{194}$	25 $\frac{1}{2}\sqrt{218}$	26 $\frac{1}{2}\sqrt{250}$	27 $\frac{1}{2}\sqrt{290}$	28 $\frac{1}{2}\sqrt{338}$	35	43	52	62	73	85
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29	29 $\frac{1}{2}\sqrt{226}$	30 $\frac{1}{2}\sqrt{234}$	31 $\frac{1}{2}\sqrt{250}$	32 $\frac{1}{2}\sqrt{274}$	33 $\frac{1}{2}\sqrt{306}$	34 $\frac{1}{2}\sqrt{346}$	35 $\frac{1}{2}\sqrt{394}$	36 $\frac{1}{2}\sqrt{450}$	44	53	63	74	86
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37	37 $\frac{1}{2}\sqrt{290}$	38 $\frac{1}{2}\sqrt{298}$	39 $\frac{1}{2}\sqrt{314}$	40 $\frac{1}{2}\sqrt{338}$	41 $\frac{1}{2}\sqrt{370}$	42 $\frac{1}{2}\sqrt{410}$	43 $\frac{1}{2}\sqrt{458}$	44 $\frac{1}{2}\sqrt{514}$	45 $\frac{1}{2}\sqrt{578}$	54	64	75	87
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	46 $\frac{1}{2}\sqrt{362}$	47 $\frac{1}{2}\sqrt{370}$	48 $\frac{1}{2}\sqrt{386}$	49 $\frac{1}{2}\sqrt{410}$	50 $\frac{1}{2}\sqrt{442}$	51 $\frac{1}{2}\sqrt{482}$	52 $\frac{1}{2}\sqrt{530}$	53 $\frac{1}{2}\sqrt{586}$	54 $\frac{1}{2}\sqrt{650}$	55 $\frac{1}{2}\sqrt{722}$	65	76	88
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	56 $\frac{1}{2}\sqrt{442}$	57 $\frac{1}{2}\sqrt{450}$	58 $\frac{1}{2}\sqrt{466}$	59 $\frac{1}{2}\sqrt{490}$	60 $\frac{1}{2}\sqrt{522}$	61 $\frac{1}{2}\sqrt{562}$	62 $\frac{1}{2}\sqrt{610}$	63 $\frac{1}{2}\sqrt{666}$	64 $\frac{1}{2}\sqrt{730}$	65 $\frac{1}{2}\sqrt{802}$	66 $\frac{1}{2}\sqrt{882}$	77	89
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	67 $\frac{1}{2}\sqrt{530}$	68 $\frac{1}{2}\sqrt{538}$	69 $\frac{1}{2}\sqrt{554}$	70 $\frac{1}{2}\sqrt{578}$	71 $\frac{1}{2}\sqrt{610}$	72 $\frac{1}{2}\sqrt{650}$	73 $\frac{1}{2}\sqrt{698}$	74 $\frac{1}{2}\sqrt{754}$	75 $\frac{1}{2}\sqrt{818}$	76 $\frac{1}{2}\sqrt{890}$	77 $\frac{1}{2}\sqrt{970}$	78 $\frac{1}{2}\sqrt{1058}$	90
91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	79 $\frac{1}{2}\sqrt{626}$	80 $\frac{1}{2}\sqrt{634}$	81 $\frac{1}{2}\sqrt{650}$	82 $\frac{1}{2}\sqrt{674}$	83 $\frac{1}{2}\sqrt{706}$	84 $\frac{1}{2}\sqrt{746}$	85 $\frac{1}{2}\sqrt{794}$	86 $\frac{1}{2}\sqrt{850}$	87 $\frac{1}{2}\sqrt{914}$	88 $\frac{1}{2}\sqrt{986}$	89 $\frac{1}{2}\sqrt{1067}$	90 $\frac{1}{2}\sqrt{1154}$	91 $\frac{1}{2}\sqrt{1250}$

Reihenfolge der Kreise

und

Längenbestimmung der Radien der Quadrate

aus

ungerader Wurzel.

№ 76.

91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	90
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	77	89
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	65	76	88
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37	38	39	40	41	42	43	44	45	54	64	75	87
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29	30	31	32	33	34	35	36	44	53	63	74	86
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22	23	24	25	26	27	28	35	43	52	62	73	85
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16	17	18	19	20	21	27	34	42	51	61	72	84
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11	12	13	14	15	20	26	33	41	50	60	71	83
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7	8	9	10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4	5	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
79	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1 0	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
80	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	2 1	3 $\sqrt{2}$	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
81	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6	5	4 2	5 $\sqrt{5}$	6 $\sqrt{8}$	9	13	18	24	31	39	48	58	69	81
82	70	59	49	40	32	25	19	14	10	9	8	7 3	8 $\sqrt{10}$	9 $\sqrt{13}$	10 $\sqrt{18}$	14	19	25	32	40	49	59	70	82
83	71	60	50	41	33	26	20	15	14	13	12	11 4	12 $\sqrt{17}$	13 $\sqrt{20}$	14 $\sqrt{25}$+	15 $\sqrt{32}$	20	26	33	41	50	60	71	83
84	72	61	51	42	34	27	21	20	19	18	17	16 5+	17 $\sqrt{26}$	18 $\sqrt{29}$	19 $\sqrt{34}$	20 $\sqrt{41}$	21 $\sqrt{50}$+	27	34	42	51	61	72	84
85	73	62	52	43	35	28	27	26	25	24	23	22 6	23 $\sqrt{37}$	24 $\sqrt{40}$	25 $\sqrt{45}$	26 $\sqrt{52}$	27 $\sqrt{61}$	28 $\sqrt{72}$	35	43	52	62	73	85
86	74	63	53	44	36	35	34	33	32	31	30	29 7	30 $\sqrt{50}$+	31 $\sqrt{53}$	32 $\sqrt{58}$	33 $\sqrt{65}$+	34 $\sqrt{74}$	35 $\sqrt{85}$+	36 $\sqrt{98}$	44	53	63	74	86
87	75	64	54	45	44	43	42	41	40	39	38	37 8	38 $\sqrt{65}$+	39 $\sqrt{68}$	40 $\sqrt{73}$	41 $\sqrt{80}$	42 $\sqrt{89}$	43 $\sqrt{100}$	44 $\sqrt{113}$	45 $\sqrt{128}$	54	64	75	87
88	76	65	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46 9	47 $\sqrt{82}$	48 $\sqrt{85}$+	49 $\sqrt{90}$	50 $\sqrt{97}$	51 $\sqrt{106}$	52 $\sqrt{117}$	53 $\sqrt{130}$+	54 $\sqrt{145}$+	55 $\sqrt{152}$	65	76	88
89	77	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56 10+	57 $\sqrt{101}$	58 $\sqrt{104}$	59 $\sqrt{109}$	60 $\sqrt{116}$	61 $\sqrt{125}$+	62 $\sqrt{136}$	63 $\sqrt{149}$	64 $\sqrt{164}$	65 $\sqrt{181}$	66 $\sqrt{200}$	77	89
90	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67 11	68 $\sqrt{122}$	69 $\sqrt{125}$+	70 $\sqrt{130}$+	71 $\sqrt{137}$	72 $\sqrt{146}$	73 $\sqrt{157}$	74 $\sqrt{170}$	75 $\sqrt{185}$	76 $\sqrt{202}$	77 $\sqrt{221}$	78 $\sqrt{242}$	90
91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79 12	80 $\sqrt{145}$+	81 $\sqrt{148}$	82 $\sqrt{153}$	83 $\sqrt{160}$	84 $\sqrt{169}$	85 $\sqrt{180}$	86 $\sqrt{193}$	87 $\sqrt{208}$	88 $\sqrt{225}$	89 $\sqrt{244}$	90 $\sqrt{265}$	91 $\sqrt{288}$

Das Gesetz des menschlichen Wachsthumes

von

Dr. Franz Liharžik.

Maasseinheit = Ein Centimètre.

Männliches Geschlecht.

№ 78.

Die Epochen	Ende der Epochen in Monaten	Länge des			Entfernung des Schwertknorpels von der Schoossfuge	Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels	Von der Sohle zum Mittelpunkte des innern Knöchels	Vom Scheitel zur Schoossfuge	Von der Schoossfuge zur Sohle	Länge des ganzen Körpers	Bei wagrecht ausgestreckter Extremität Länge				Die halbe Körperlänge	Die halbe Schulterbreite = der halben Hüftenbreite	Querer Kopfdurchmesser	Der gerade Kopfdurchmesser	Die grösste Kopfperipherie	Die Brustperipherie	Der gerade Brustdurchmesser = dem geraden Beckendurchmesser
		Halses	Kopfes	Brustbeines							der Hand = Länge des Schlüsselbeines	des Vorderarmes	des Oberarmes	von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmbeins							
Der Neugeborene		1	12	7	5 + 5	18	2	30	20	50	6	7	9	3	25	5	10	12	36	36	10
1	1	1 8/12	13	8	5 6/12 + 5 6/12	21	2 2/12	33 8/12	23 2/12	56 10/12	6 19/24	7 23/24	10 3/12	3 5/12	28 5/12	5 95/144	10 7/12	12 8/12	38 4/12	39	11
2	3	2 4/12	14	9	6 + 6	24	2 4/12	37 4/12	26 4/12	63 8/12	7 14/24	8 22/24	11 6/12	3 10/12	31 10/12	6 46/144	11 2/12	13 4/12	40 8/12	42	12
3	6	3	15	10	6 6/12 + 6 6/12	27	2 6/12	41	29 6/12	70 6/12	8 9/24	9 21/24	12 9/12	4 3/12	35 3/12	6 141/144	11 9/12	14	43	45	13
4	10	3 8/12	16	11	7 + 7	30	2 8/12	44 8/12	32 8/12	77 4/12	9 4/24	10 20/24	14	4 8/12	38 8/12	7 92/144	12 4/12	14 8/12	45 4/12	48	14
5	15	4 4/12	17	12	7 6/12 + 7 6/12	33	2 10/12	48 4/12	35 10/12	84 2/12	9 23/24	11 19/24	15 3/12	5 1/12	42 1/12	8 43/144	12 11/12	15 4/12	47 8/12	51	15
6	21	5	18	13	8 + 8	36	3	52	39	91	10 18/24	12 18/24	16 6/12	5 6/12	45 6/12	8 23/24	13 6/12	16	50	54	16
7	28	5 2/12	18 5/12	13 8/12	8 4/12 + 8 4/12	39 10/12	3 3/12	53 11/12	43 1/12	97	11 23/48	13 27/48	17 7/12	5 21/24	48 6/12	9 163/288	13 9/12	16 3/12	50 4/12	56	16 5/12
8	36	5 4/12	18 10/12	14 4/12	8 8/12 + 8 8/12	43 8/12	3 6/12	55 10/12	47 2/12	103	12 10/48	14 18/48	18 8/12	6 5/24	51 8/12	10 50/288	14	16 6/12	50 8/12	58	16 10/12
9	45	5 6/12	19 3/12	15	9 + 9	47 6/12	3 9/12	57 9/12	51 3/12	109	12 45/48	15 9/48	19 9/12	6 15/24	54 6/12	10 225/288	14 3/12	16 9/12	51	60	17 3/12
10	55	5 8/12	19 8/12	15 8/12	9 4/12 + 9 4/12	51 4/12	4	59 8/12	55 4/12	115	13 32/48	16	20 10/12	7	57 6/12	11 112/288	14 6/12	17	51 4/12	62	17 8/12
11	66	5 10/12	20 1/12	16 4/12	9 8/12 + 9 8/12	55 2/12	4 3/12	61 7/12	59 5/12	121	14 19/48	16 39/48	21 11/12	7 9/24	60 6/12	11 287/288	14 9/12	17 3/12	51 8/12	64	18 1/12
12	78	6	20 6/12	17	10 + 10	59	4 6/12	63 6/12	63 6/12	127	15 6/48	17 30/48	23	7 18/24	63 6/12	12 174/288	15	17 6/12	52	66	18 6/12
13	91	6 2/12	20 11/12	17 8/12	10 4/12 + 10 4/12	62 10/12	4 9/12	65 5/12	67 7/12	133	15 41/48	18 21/48	24 1/12	8 3/24	66 6/12	13 61/288	15 3/12	17 9/12	52 4/12	68	18 11/12
14	105	6 4/12	21 4/12	18 4/12	10 8/12 + 10 8/12	66 8/12	5	67 4/12	71 8/12	139	16 28/48	19 12/48	25 2/12	8 12/24	69 6/12	13 236/288	15 6/12	18	52 8/12	70	19 4/12
15	120	6 6/12	21 9/12	19	11 + 11	70 6/12	5 3/12	69 3/12	75 9/12	145	17 15/48	20 3/48	26 3/12	8 21/24	72 6/12	14 123/288	15 9/12	18 3/12	53	72	19 9/12
16	136	6 8/12	22 2/12	19 8/12	11 4/12 + 11 4/12	74 4/12	5 6/12	71 2/12	79 10/12	151	18 2/48	20 42/48	27 4/12	9 6/24	75 6/12	15 10/288	16	18 6/12	53 4/12	74	20 2/12
17	153	6 10/12	22 7/12	20 4/12	11 8/12 + 11 8/12	78 2/12	5 9/12	73 1/12	83 11/12	157	18 37/48	21 33/48	28 5/12	9 15/24	78 6/12	15 185/288	16 3/12	18 9/12	53 8/12	76	20 7/12
18	171	7	23	21	12 + 12	82	6	75	88	163	19 24/48	22 24/48	29 6/12	10	81 6/12	16 48/72	16 6/12	19	54	78	21
19	190	7 4/12	23 2/12	21 2/12	12 2/12 + 12 2/12	82 6/12	6 6/12	76	89	165	19 9/12	22 10/12	29 10/12	10 1/12	82 6/12	16 33/72	16 8/12	19 4/12	54 6/12	81 6/12	21 6/12
20	210	7 8/12	23 4/12	21 4/12	12 4/12 + 12 4/12	83	7	77	90	167	20	23 2/12	30 2/12	10 2/12	83 6/12	16 48/72	16 10/12	19 8/12	55	85	22
21	231	8	23 6/12	21 6/12	12 6/12 + 12 6/12	83 6/12	7 6/12	78	91	169	20 3/12	23 6/12	30 6/12	10 3/12	84 6/12	16 63/72	17	20	55 6/12	88 6/12	22 6/12
22	253	8 4/12	23 8/12	21 8/12	12 8/12 + 12 8/12	84	8	79	92	171	20 6/12	23 10/12	30 10/12	10 4/12	85 6/12	17 6/72	17 2/12	20 4/12	56	92	23
23	276	8 8/12	23 10/12	21 10/12	12 10/12 + 12 10/12	84 6/12	8 6/12	80	93	173	20 9/12	24 2/12	31 2/12	10 5/12	86 6/12	17 21/72	17 4/12	20 8/12	56 6/12	95 6/12	23 6/12
24	300	9	24	22	13 + 13	85	9	81	94	175	21	24 6/12	31 6/12	10 6/12	87 6/12	17 36/72	17 6/12	21	57	99	24

Das Gesetz des menschlichen Wachsthumes

von

Dr. Franz Liharžik.

Maasseinheit = Ein Centimètre.

Weibliches Geschlecht.

№ 79.

Die Epochen	Ende der Epochen in Monaten	Länge des			Entfernung des Schwertknorpels von der Schoossfuge	Gesammtlänge des Ober- und Unterschenkels	Von der Sohle zum Mittelpunkte des innern Knöchels	Vom Scheitel zur Schoossfuge	Von der Schoossfuge zur Sohle	Länge des ganzen Körpers
		Halses	Kopfs	Brustbeines						
Die Neugeborene		1	12	6	5 + 5	17	2	29	19	48
1	1	1 8/12	13	7	5 6/12 + 5 6/12	20	2 2/12	32 8/12	22 2/12	54 10/12
2	3	2 4/12	14	8	6 + 6	23	2 4/12	36 4/12	25 4/12	61 8/12
3	6	3	15	9	6 6/12 + 6 6/12	26	2 6/12	40	28 6/12	68 6/12
4	10	3 8/12	16	10	7 + 7	29	2 8/12	43 8/12	31 8/12	75 4/12
5	15	4 4/12	17	11	7 6/12 + 7 6/12	32	2 10/12	47 4/12	34 10/12	82 2/12
6	21	5	18	12	8 + 8	35	3	51	38	89
7	28	5 2/12	18 5/12	12 8/12	8 4/12 + 8 4/12	38 10/12	3 3/12	52 11/12	42 1/12	95
8	36	5 4/12	18 10/12	13 4/12	8 8/12 + 8 8/12	42 8/12	3 6/12	54 10/12	46 2/12	101
9	45	5 6/12	19 3/12	14	9 + 9	46 6/12	3 9/12	56 2/12	50 3/12	107
10	55	5 8/12	19 8/12	14 8/12	9 4/12 + 9 4/12	50 4/12	4	58 8/12	54 4/12	113
11	66	5 10/12	20 1/12	15 4/12	9 8/12 + 9 8/12	54 2/12	4 3/12	60 7/12	58 5/12	119
12	78	6	20 6/12	16	10 + 10	58	4 6/12	62 6/12	62 6/12	125
13	91	6 2/12	20 11/12	16 8/12	10 4/12 + 10 4/12	61 10/12	4 9/12	64 5/12	66 7/12	131
14	105	6 4/12	21 4/12	17 4/12	10 8/12 + 10 8/12	65 8/12	5	66 4/12	70 8/12	137
15	120	6 6/12	21 9/12	18	11 + 11	69 6/12	5 3/12	68 3/12	74 9/12	143
16	136	6 8/12	22 2/12	18 8/12	11 4/12 + 11 4/12	73 4/12	5 6/12	70 2/12	78 10/12	149
17	153	6 10/12	22 7/12	19 4/12	11 8/12 + 11 8/12	77 2/12	5 9/12	72 1/12	82 11/12	155
18	171	7	23	20	12 + 12	81	6	74	87	161
19	190	7 4/12	23 2/12	20 2/12	12 2/12 + 12 2/12	81 6/12	6 6/12	75	88	163
20	210	7 8/12	23 4/12	20 4/12	12 4/12 + 12 4/12	82	7	76	89	165
21	231	8	23 6/12	20 6/12	12 6/12 + 12 6/12	82 6/12	7 6/12	77	90	167
22	253	8 4/12	23 8/12	20 8/12	12 8/12 + 12 8/12	83	8	78	91	169
23	276	8 8/12	23 10/12	20 10/12	12 10/12 + 12 10/12	83 6/12	8 6/12	79	92	171
24	300	9	24	21	13 + 13	84	9	80	93	173

Die Epochen	Ende der Epochen in Monaten	Bei wagrecht ausgestreckter Extremität Länge				Die halbe Körperlänge	Die halbe Schulterbreite	Querer Kopfdurchmesser	Der gerade Kopfdurchmesser	Die grösste Kopfperipherie	Die Brustperipherie	Der gerade Brustdurchmesser = dem geraden Beckendurchmesser	Die Hüftenbreite
		der Hand = Länge des Schlüsselbeins	des Vorderarmes	des Oberarmes	von der Mittellinie des Körpers zum Kopf des Oberarmbeins								
Die Neugeborene		5 6/12	7	9	2 6/12	24	4 72/144	9 6/12	11 6/12	34 6/12	34 6/12	10	11 6/12
1	1	6 7/24	7 23/24	10 3/12	2 11/12	27 5/12	5 23/144	10 1/12	12 2/12	36 10/12	37 6/12	11	12 10/12
2	3	7 2/24	8 22/24	11 6/12	3 4/12	30 10/12	5 118/144	10 8/12	12 10/12	39 2/12	40 6/12	12	14 2/12
3	6	7 21/24	9 21/24	12 9/12	3 9/12	34 3/12	6 69/144	11 3/12	13 6/12	41 6/12	43 6/12	13	15 6/12
4	10	8 16/24	10 20/24	14	4 2/12	37 8/12	7 20/144	11 10/12	14 2/12	43 10/12	46 6/12	14	16 10/12
5	15	9 11/24	11 19/24	15 3/12	4 7/12	41 1/12	7 115/144	12 5/12	14 10/12	46 2/12	49 6/12	15	18 2/12
6	21	10 6/24	12 18/24	16 6/12	5	44 6/12	8 66/144	13	15 6/12	48 6/12	52 6/12	16	19 6/12
7	28	10 47/48	13 27/48	17 7/12	5 9/24	47 6/12	9 19/288	13 3/12	15 9/12	48 10/12	54 6/12	16 5/12	20 19/24
8	36	11 34/48	14 18/48	18 8/12	5 18/24	50 6/12	9 194/288	13 6/12	16	49 2/12	56 6/12	16 10/12	22 2/24
9	45	12 21/48	15 9/48	19 9/12	6 3/24	53 6/12	10 81/288	13 9/12	16 3/12	49 6/12	58 6/12	17 3/12	23 9/24
10	55	13 8/48	15	20 10/12	6 12/24	56 6/12	10 256/288	14	16 6/12	49 10/12	60 6/12	17 8/12	24 16/24
11	66	13 43/48	16 39/48	21 11/12	6 21/24	59 6/12	11 143/288	14 3/12	16 9/12	50 2/12	62 6/12	18 1/12	25 23/24
12	78	14 30/48	17 30/48	23	7 6/24	62 6/12	12 30/288	14 6/12	17	50 6/12	64 6/12	18 6/12	27 6/24
13	91	15 17/48	18 21/48	24 1/12	7 15/24	65 6/12	12 205/288	14 9/12	17 3/12	50 10/12	66 6/12	18 11/12	28 13/24
14	105	16 4/48	19 12/48	25 2/12	8	68 6/12	13 92/288	15	17 6/12	51 2/12	68 6/12	19 4/12	29 20/24
15	120	16 39/48	20 3/48	26 3/12	8 9/24	71 6/12	13 267/288	15 3/12	17 9/12	51 6/12	70 6/12	19 9/12	31 3/24
16	136	17 26/48	20 42/48	27 4/12	8 18/24	74 6/12	14 154/288	15 6/12	18	51 10/12	72 6/12	20 2/12	32 10/24
17	153	18 13/48	21 33/48	28 5/12	9 3/24	77 6/12	15 41/288	15 9/12	18 3/12	52 2/12	74 6/12	20 7/12	33 17/24
18	171	19	22 24/48	29 6/12	9 12/24	80 6/12	15 54/72	16	18 6/12	52 6/12	76 6/12	21	35
19	190	19 3/12	22 10/12	29 10/12	9 7/12	81 6/12	15 69/72	16 2/12	18 10/12	53	80	21 6/12	35 8/12
20	210	19 6/12	23 2/12	30 2/12	9 8/12	82 6/12	16 12/72	16 4/12	19 2/12	53 6/12	83 6/12	22	36 4/12
21	231	19 9/12	23 6/12	30 6/12	9 9/12	83 6/12	16 27/72	16 6/12	19 6/12	54	87	22 6/12	37
22	253	20	23 10/12	30 10/12	9 10/12	84 6/12	16 42/72	16 8/12	19 10/12	54 6/12	90 6/12	23	37 8/12
23	276	20 3/12	24 2/12	31 2/12	9 11/12	85 6/12	16 57/72	16 10/12	20 2/12	55	94	23 6/12	38 4/12
24	300	20 6/12	24 6/12	31 6/12	10	86 6/12	17	17	20 6/12	55 6/12	97 6/12	24	39

Construction

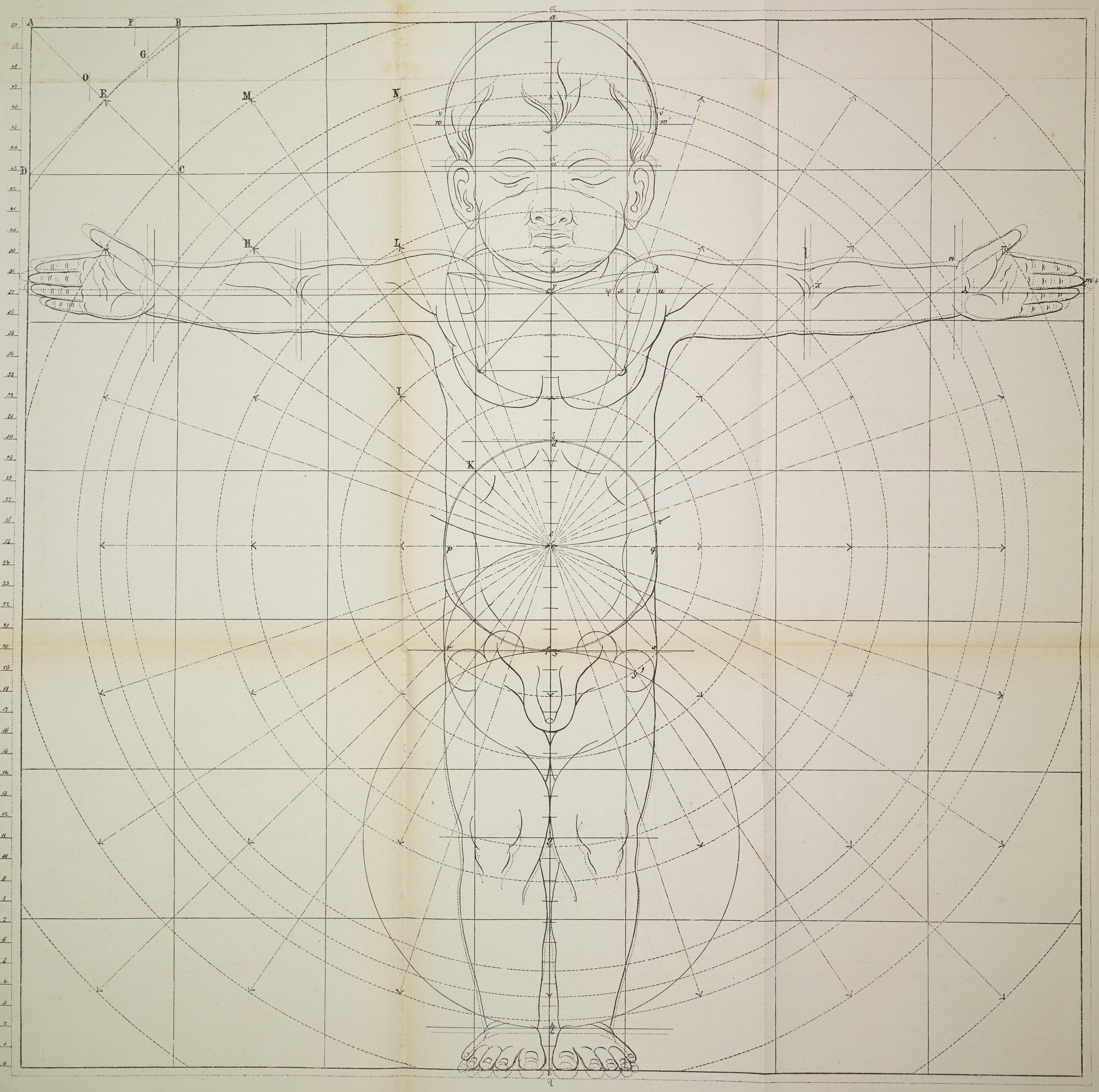
der

Dimensions-Verhältnisse der Gestalt des neugeborenen Knaben

aus dem

Quadrate der Zahl

7.



Kopflänge .... AB + AE = $\alpha\alpha' + \alpha'\beta$ = 12.177; ab = 12.
Halslänge .... 0E = $\beta\gamma$ = 0.821; bc = 1.
Brustbeinlänge .... AB = $\gamma\delta$ = 7.142; cd = 7.
Vom Schwertknorpel zur Schoossfuge .... AC = $\delta\vartheta$ = 10.070; df = 10.
Oberlänge .... $\alpha\vartheta$ = 30.210; af = 30.

Von der Schoossfuge zur Mitte des Knöchels 2AB + AE + 0E − FB = $\vartheta\varepsilon$ = 18.33; fh = 18.
Von der Mitte des Knöchels zur Sohle .... FB = $\varepsilon\eta$ = 2.107; hi = 2.
Unterlänge .... $\vartheta\eta$ = 20.140; fi = 20.
Ganze Körperlänge .... $\alpha\eta$ = 50.350; ai = 50.
Der quere Kopfdurchmesser .... AC = $\nu\nu'$ = 10.070; ww′ = 10.
Der gerade Kopfdurchmesser .... AB + AE .... = 12.177; ..... 12.

Von der Mittellinie des Körpers zum Kopfe des Oberarmbeines. EG = $\gamma\varphi$ = 2.928; cx = 3.
Länge des Oberarmes .... AB + AE − EG = $\varphi\pi$ = 9.249; xl = 9.
Länge des Vorderarmes .... AB = $\pi\lambda$ = 7.142; ln = 7.
Länge der Hand .... AE + 0E = $\lambda\mu$ = 5.856; nm = 6.
Die halbe Körperlänge .... αe = $\gamma\mu$ = 25.175; cm = 25.

DIAGRAMM

aus den einzelnen Grössen der Körperlänge nach dem Gesetze des menschlichen Wachsthumes

von

Dr. Franz Liharžik

Männliches Geschlecht.